Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 173

Heft 1

Ausgegeben den 20. März 1935

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1935

Band 173. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Deuring, Max, Neuer Beweis des Bauerschen Satzes.	1
Bögel, Karl, Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation	5
Reichardt, Hans, Die Diskriminante einer normalen einfachen Algebra.	31
Wolff, Hermann, Über harmonikale Abbildungen.	35
Witt, Ernst, Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper	43
Schmidt, Robert, Die allgemeine Newtonsche Quadraturformel und Quadraturformeln für Stieltjesintegrale	52
Franz, Wolfgang, Die Teilwerte der Weberschen Tau-Funktion	60

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10
Printed in Germany

Neuer Beweis des Bauerschen Satzes.

Von *Max Deuring* in Leipzig. [1])

---

1. Der Bauersche Satz sagt aus, daß eine galoissche Erweiterung K eines algebraischen Zahlkörpers k gekennzeichnet ist durch die Menge der Primideale von k, die in K voll zerfallen. Der genaue Wortlaut ist:

K sei eine galoissche, Ω eine beliebige Erweiterung des Zahlkörpers k. Wenn fast alle Primideale absolut ersten Grades von k, die in Ω einen Primfaktor ersten Grades haben, in K voll zerfallen, so ist K in Ω enthalten.

„Fast alle" bedeutet: bis auf eine Ausnahmemenge von der Dirichletdichte Null.

Der Bauersche Satz wird dem Kreis der auf die analytischen Methoden in der Theorie der algebraischen Zahlen gegründeten Sätze zugerechnet. Es ist das Ziel dieser Abhandlung, einen rein zahlentheoretischen Beweis des Bauerschen Satzes zu geben. In der Natur der Sache liegt es, daß dabei der Bauersche Satz in einer etwas schwächeren Form herauskommt: die Bedeutung des „fast alle" ist enger zu fassen und im Sinne von „alle bis auf endlich viele" zu verstehen. Für die meisten Anwendungen des Bauerschen Satzes genügt diese Fassung.

2. Wir brauchen zwei Hilfssätze, von denen der erste ein grundlegendes Ergebnis des arithmetischen Teils der Klassenkörpertheorie ist; der zweite ist eine naturgemäße Verallgemeinerung eines wenig beachteten Satzes in Hilberts Zahlbericht (Zahlber. Satz 89, § 53), der in besonderen Fällen schon von Kummer bewiesen wurde (Über d. Zerlegung d. aus Wurzeln d. Einheit gebildeten kompl. Zahlen i. ihre Primfaktoren, dieses Journal 35 (1847)). Der Hilbertsche Beweis ist ohne Schwierigkeiten übertragbar.

Der erste der beiden Hilfssätze ist:

Wenn K/k zyklisch vom Grade n ist, so hat die Idealgruppe H in k, die von den Normen der K-Ideale aufgespannt wird, einen durch n teilbaren Index. Der Erklärungsmodul von H muß ein Vielfaches eines gewissen Idealmoduls sein, der durch K bestimmt ist.

Der zweite Hilfssatz lautet:

In jeder Idealklasse nach einer Idealgruppe H in einem Zahlkörper k gibt es Ideale, deren Primfaktoren sämtlich den Absolutgrad eins haben.

3. Aus den beiden Hilfssätzen erschließen wir den Bauerschen Satz in der folgenden positiven Gestalt:

---

[1]) Diese Abhandlung entstand, während der Verfasser als Sterling Research Fellow an der Yale University weilte (1933).

Ist die galoissche Erweiterung K von k nicht in Ω/k enthalten, so gibt es in k Primideale absolut ersten Grades, die in Ω einen Primfaktor ersten Grades haben, aber in K nicht voll zerfallen und dabei von vorgegebenen endlich vielen Primidealen verschieden sind.

Beweis. Da $K\Omega \neq \Omega$ ist, so gibt es einen Körper $k_0 \neq K\Omega$ zwischen Ω und $K\Omega$, über dem $K\Omega$ zyklisch ist. H sei die dem Körper $K\Omega$ zugeordnete Idealgruppe in k_0 gemäß dem ersten Hilfssatz. $\mathfrak{a}$ sei ein Ideal von k_0, das in einer von H selbst verschiedenen Klasse modulo H liegt. $\mathfrak{a}$ muß nach dem ersten Hilfssatz mindestens einen Primfaktor $\mathfrak{P}$ enthalten, der in $K\Omega$ nicht voll zerfällt. Wählen wir $\mathfrak{a}$ gemäß dem zweiten Hilfssatz, so ist $\mathfrak{P}$ vom Absolutgrad eins. Sind endlich viel vorgegebene Primideale von k in den Erklärungsmodul von H aufgenommen worden, so ist $\mathfrak{P}$ auch zu diesen Primidealen teilerfremd. $\mathfrak{P}$ teilt ein Primideal $\mathfrak{q}$ von Ω, $\mathfrak{q}$ teilt ein Primideal $\mathfrak{p}$ von k, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ sind beide vom Absolutgrad eins. $\mathfrak{p}$ kann in K nicht voll zerfallen, hat aber in Ω den Primfaktor $\mathfrak{q}$ vom Absolutgrad eins [2]).

4. Wir geben jetzt den Beweis des zweiten Hilfssatzes.

Wir wählen eine positive ganze rationale Zahl R, die teilbar ist durch den Erklärungsmodul von H, durch die Diskriminante von k und durch alle Primzahlen, die nicht größer sind als der Grad von k. $\mathfrak{p}$ sei ein zu R teilerfremdes Primideal vom Grade $f > 1$ in k. Wir zeigen, daß es in der Strahlklasse mod Rp_∞, zu der $\mathfrak{p}$ gehört, ein Ideal gibt, dessen Primfaktoren kleineren Grad als f haben. Der zweite Hilfssatz folgt daraus unmittelbar. Wir werden also zeigen, daß es in k eine total positive ganze Zahl Γ gibt, die durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbar ist, deren übrige Primfaktoren kleineren Grad als f haben und die der Kongruenz $\Gamma \equiv 1 \pmod{R}$ genügt.

p sei die durch $\mathfrak{p}$ teilbare rationale Primzahl, $p = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$; $\mathfrak{q}$ ist dann nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar. A' sei eine primitive Wurzel modulo $\mathfrak{p}$. Wir ersetzen sie durch eine ganze Zahl A, die den Kongruenzen

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}' \pmod{\mathfrak{p}}$$
$$\mathsf{A} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$$
$$\mathsf{A} \equiv 1 \pmod{R}$$

genügt. A ist eine den Körper k erzeugende Zahl. Um das einzusehen, betrachten wir den galoisschen Körper k^* von k, in k^* einen Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ und dessen Zerlegungskörper Z. $\mathfrak{p}'$ sei das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal des Körpers kZ. $\mathfrak{p}'$ hat den Grad eins in Beziehung auf k, denn da jede Zahl von Z modulo $\mathfrak{P}$ einer rationalen Zahl kongruent ist, so ist jede Zahl von kZ modulo $\mathfrak{P}$ einer Zahl von k kongruent. Der Grad von $\mathfrak{p}'$ in Beziehung auf den Körper der rationalen Zahlen ist daher f. Da andererseits der Absolutgrad von $\mathfrak{p}'$ gleich dem Grad von kZ über Z ist, so folgt, daß $[kZ : Z] = f$ ist. Der Grad der $\mathfrak{p}'$-Restklasse $\overline{\mathsf{A}}$ ist f, daher ist A erzeugendes Element von kZ in Beziehung auf Z. $\mathfrak{H}$ sei die Untergruppe der Galoisgruppe von k^*, zu der k gehört, $\mathfrak{Z}$ die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$. Die nicht in $\mathfrak{H}$ liegenden Elemente des Komplexes $\mathfrak{Z}\mathfrak{H}$ lassen A nicht fest, denn sie ergeben von der Identität verschiedene Automorphismen von kZ/Z. Gehört der Automorphismus

---

[2]) Diese Schlußweise liefert auch Teilaussagen des Frobeniusschen Satzes von der Existenz von Primidealen mit gegebener Zerlegungsgruppe (wenn die Zerlegungsgruppe Primzahlpotenzordnung hat); eine weitere Folgerung ist die Tatsache, daß das (zusammengesetzte) Artinsymbol für ein abelsches K die volle Galoisgruppe durchläuft. Man vergleiche übrigens: F. K. Schmidt, Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich, dies. Journ. **171** (1934), S. 162.

τ von k^* nicht zu $\mathfrak{ZH}$, so ist $\mathfrak{P}^\tau$ kein Teiler von $\mathfrak{p}$, daher

$$\mathsf{A} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^\tau}, \quad \mathsf{A}^{\tau-1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}, \quad \mathsf{A}^{\tau-1} \not\equiv \mathsf{A}, \quad \mathsf{A} \not\equiv \mathsf{A}^\tau.$$

A bleibt nur bei der Untergruppe $\mathfrak{H}$ fest, ist erzeugendes Element von k.

$$\mathsf{A}^f + \alpha_1 \mathsf{A}^{f-1} + \cdots + \alpha_f = 0$$

sei die irreduzible Gleichung für A in Z (die sogar in $k \subset Z$ liegt). Es kann außer Z noch andere Teilkörper von k^* geben, in denen A vom Grade f ist, wir bezeichnen sie mit $Z_1, Z_2, \ldots$; die Gleichung für A in Z_i sei

$$\mathsf{A}^f + \alpha_{1i} \mathsf{A}^{f-1} + \cdots + \alpha_{fi} = 0. \tag{1}$$

Wir bestimmen ganze rationale Zahlen b_i gemäß

$$Rb_i \equiv \alpha_i \pmod{\mathfrak{p}^2},$$

(das geht, da die α_i im Zerlegungskörper von $\mathfrak{p}$ liegen und $p \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ ist), sorgen aber dafür, daß die Zahlen

$$\begin{aligned} \beta_1 &= Rb_1 - \alpha_1 \\ \beta_{11} &= Rb_1 - \alpha_{11} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

von Null verschieden sind und daß

$$\mathsf{B} = \mathsf{A}^f + R(b_1 \mathsf{A}^{f-1} + \cdots + b_f)$$

total positiv ist. Die nicht in pR aufgehenden Primzahlen, die entweder die Diskriminante der Zahl A oder eine der Normen $N\beta_1, N\beta_{11}, \ldots$ teilen, seien $q_1, \ldots, q_t$. Da q_i größer als der Grad von k sein muß, so muß wenigstens eine der Zahlen B, $\mathsf{B}+1$, $\mathsf{B}+2, \ldots, \mathsf{B}+q_i-1$ zu q_i teilerfremd sein, denn q_i enthält höchstens soviel verschiedene Primfaktoren, wie der Grad von k angibt. Ist etwa $(\mathsf{B}+c_i, q_i) = 1$, so bestimmen wir eine positive ganze rationale Zahl c gemäß

$$Rpc \equiv c_i \pmod{q_i}, \qquad c \equiv 1 \pmod{p}$$

und setzen

$$\Gamma = \mathsf{B} + Rpc.$$

Γ ist eine Zahl der verlangten Art: Es ist $\Gamma \equiv 1 \pmod{R}$ und Γ ist total positiv. Γ ist durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbar, denn es ist $\Gamma \equiv Rpc \pmod{\mathfrak{p}^2}$ und p ist genau durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Es ist $\Gamma = \mathsf{A}^f + d_1 \mathsf{A}^{f-1} + \cdots + d_f$ mit ganzen rationalen d_ν. Gesetzt, $\mathfrak{r}$ wäre ein Primteiler von Γ, dessen Grad $f' > f$ ist. L bedeute den Zerlegungskörper von $\mathfrak{r}$. $kL = L(\mathsf{A})$ hat den Grad f' über L. Für die f' zu A in Beziehung auf L konjugierten Zahlen $\mathsf{A}^{(\nu)}$ würde dann

$$\mathsf{A}^{(\nu)f} + d_1 \mathsf{A}^{(\nu)f-1} + \cdots + d_f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{r}}$$

folgen. Das ist aber unmöglich, denn wegen $f' \geqq f+1$ müßte sich hieraus die Teilbarkeit der Diskriminante von A durch $\mathfrak{r}$ ergeben, Γ ist aber zur Diskriminante von A teilerfremd gemäß der Wahl der c_i und c. Wäre schließlich $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{p}$ ein Primteiler f-ten Grades von Γ so müßte der Zerlegungskörper von $\mathfrak{r}$ einer der Körper $Z, Z_1, Z_2, \ldots$, etwa Z_λ sein. Unter Heranziehung von (1) und (2) ergibt sich jetzt, daß die f zu A in Beziehung auf Z konjugierten Zahlen $\mathsf{A}^{(\nu)}$ den Kongruenzen

$$\beta_{1\lambda} \mathsf{A}^{(\nu)f-1} + \beta_{2\lambda} \mathsf{A}^{(\nu)f-2} + \cdots + \beta_{f\lambda} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{r}}$$

genügen, wo $\beta_{1\lambda}$ die durch (2) definierte Zahl ist, denn es ist $f > 1$. Da die Diskriminante von A, also auch die Diskriminante dieses Kongruenzensystems nicht durch $\mathfrak{r}$ teilbar ist, so müssen die Zahlen $\beta_{1\lambda}, \ldots, \beta_{f\lambda}$ durch $\mathfrak{r}$ teilbar sein. Das ist aber unmöglich, denn nach der Wahl der c_i, c ist $\beta_{1\lambda}$ zu $\mathfrak{r}$ teilerfremd. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen. — Wir sehen, daß dieser Beweis nicht nur für Zahlkörper durchgeführt werden kann, sondern (unter anderem) etwa auch für algebraische Funktionenkörper mit einem Zahlkörper als Koeffizientenbereich; der auf diese Weise übertragbare Hilfssatz 2 kann dann z. T. als Ersatz des Satzes von der arithmetischen Progression dienen.

Eingegangen 18. August 1934.

Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation.

Von *Karl Bögel* in Halberstadt.

In einer früheren Arbeit[1]) hat der Verfasser auf der Grundlage der mehrdimensionalen Differentiation eine geschlossene Differentialrechnung für Funktionen eines reellen Veränderlichenkomplexes X_k aufgebaut; die vorliegende Arbeit schließt sich inhaltlich eng an diese frühere, im folgenden mit I zitierte, an und benutzt deren Bezeichnungen und Ergebnisse. Sie stellt die Beziehungen zwischen mehrdimensionalen Ableitungen und Integralen klar und enthält wieder alle für $k = 1$ bekannten Verknüpfungen als Spezialfälle. Dazu mußten auch die mehrdimensionalen Integrale als *vektorielle* additive Intervallfunktionen im Sinne von I, § 2 definiert werden. Im folgenden § 1 zeigen wir, wie hieraus und aus zwei anderen an jede Integraldefinition zu stellenden Forderungen sich gemeinsame Eigenschaften aller Integrale und ihrer zugehörigen Integralfunktionen — wie wir die Integrale als Funktionen ihrer Intervallendpunkte nennen werden — ergeben.

Die Hauptergebnisse des § 2 über Riemann-Integrale sind die Sätze 11 und 15 mit ihren Korollaren, die alles enthalten, was zu vermuten war; auch der Inhalt von Satz 13 dürfte über den eines gewöhnlichen Hilfssatzes hinausgehen. Im Korollar zu Satz 33 finden wir die eine Behauptung des Satzes 15 (totale k-dimensionale Differenzierbarkeit der Riemann-Integralfunktion) wesentlich vertieft wieder.

Der Unterschied zwischen primitiven Funktionen und Integralfunktionen, der schon im Falle $k = 1$ vorhanden ist, wird im Falle $k \geqq 2$ noch deutlicher erkennbar durch das Auftreten von partiell konstanten Funktionen. Für $k = 1$ ist jede primitive Funktion stetig; für $k \geqq 2$ enthält Satz 16 in § 3 eine über die bloße Analogie, nämlich die Δ_k-Stetigkeit, hinausgehende tiefere Stetigkeitseigenschaft der X_k-primitiven Funktionen. Die Sätze 17—19 beschäftigen sich mit den Stetigkeitseigenschaften der mehrdimensionalen Ableitungen, wieder in Anlehnung an bekannte Sätze für den Fall $k = 1$; aus der Tatsache heraus, daß eine Ableitung $f'(x)$ punktiert unstetig ist, war zu erwarten, daß $DX_k f$ punktiert Δ_k-unstetig sein würde; in Satz 17 ist wieder mehr als diese bloße Erweiterung bewiesen, daß nämlich $DX_k f$ ebenfalls punktiert unstetig ist. Satz 19 besagt, daß auch jede mehrdimensionale Ableitung die Eigenschaft hat, innerhalb eines Intervalles ihres Differentiationskomplexes jeden Zwischenwert anzunehmen.

Mit der Lebesgueschen Integraltheorie ist eng verwachsen der Begriff der beschränkten Variation. Die Ausdehnung dieses Begriffes auf Funktionen eines Veränderlichenkomplexes ist auf verschiedene Arten möglich[2]); wir unterscheiden zwei: die

[1]) Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen, Crelles Journal **170** (1934), S. 197 ff.

[2]) Eine Zusammenstellung findet sich in Hahn, Theorie der reellen Funktionen (Berlin 1921), S. 539 ff., eine Vergleichung in den Verh. d. intern. Math. Kongr. Zürich 1932, II, S. 122 (Adams und Clarkson, On definitions of

beschränkte X_k-Variation und die beschränkte Gesamtvariation, denen zwei entsprechende Arten von Monotonie an die Seite zu stellen sind; im übrigen sind die Definitionen so getroffen, daß die Funktionen von beschränkter Gesamtvariation unter die von beschränkter X_k-Variation fallen. Für beide Arten weisen wir in den Sätzen 21 und 26 nach, daß sich Funktionen von beschränkter Variation als Differenz zweier positiv monotoner Funktionen darstellen lassen, in Übereinstimmung mit den bekannten Fällen $k = 1$ und $k = 2$. Die beiden Sätze 22 und 23 des § 5 sagen aus, daß eine Funktion von beschränkter X_k-Variation auf einer höchstens abzählbaren Menge nicht Δ_k-stetig und auf einer Nullmenge nicht k-dimensional differenzierbar ist; zum Beweise wurden die für den Fall $k = 1$ bekannten Methoden benutzt [3]).

Für Funktionen von beschränkter Gesamtvariation war fast überall Stetigkeit und totale k-dimensionale Differenzierbarkeit zu erwarten. Daß die Gegenmenge das innere Maß Null besitzt, folgt leicht aus den Sätzen 22 und 23. Die Schwierigkeit bestand hier darin, dies auch für ihr äußeres Maß nachzuweisen; zur Vorbereitung dienen die Sätze 24 und 25 des § 6, in welchen ein Sich-Durchprojizieren der partiellen Monotonie und beschränkten Variation bei diesen Funktionen zutage tritt. Hieraus ergibt sich Satz 27 in § 7 über das Maß und die Lage der Stetigkeitspunkte ziemlich rasch. Dagegen setzte Satz 29 dem Beweise zuerst großen Widerstand entgegen, der durch Abänderung des Beweisverfahrens von Satz 23 überwunden werden konnte. Aus ihm ergibt sich der Hauptsatz, daß fast überall totale k-dimensionale Differenzierbarkeit vorliegt, als Satz 30 sofort [4]).

In § 8 sind als Sonderfälle der Funktionen von beschränkter Variation die Funktionen mit beschränkten Differenzenquotienten angeschlossen. Auch diese Eigenschaft projiziert sich partiell durch ein Intervall (Satz 31); aus den Anwendungen ist das Korollar zu Satz 33 hervorzuheben, wonach auch die obere und die untere Riemann-Integralfunktion einer beschränkten, sonst aber beliebigen Funktion fast überall k-dimensional total differenzierbar ist.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich in § 9 die Hauptsätze 35 und 36 über Lebesgue-Integrale leicht herleiten; es zeigt sich, daß das Lebesgue-Integral auch in dem k-dimensionalen Falle das Umkehrproblem für beschränkte Funktionen löst. In § 10 wird dann noch die Übereinstimmung der „vollständigen Lebesgue-Integralfunktionen“ mit den Funktionen, die beschränkte Differenzenquotienten besitzen, nachgewiesen.

Dem Problem der Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge ist abschließend § 11 gewidmet. Die bisher bekannten Sätze über die Existenz von Punkten, in denen der Wert einer sukzessiven Ableitung unabhängig von der Differentiationsfolge ist, setzten volle oder partielle Stetigkeit von Ableitungen voraus. Wir weisen zunächst in Satz 39 nach, daß jede beschränkte sukzessive Ableitung nicht nur sukzessiv, sondern mehrdimensional nach ihrem Differentiationskomplex integrabel ist; hieraus ergibt sich

---

bounded variation . . .). Eine neue Arbeit dieser beiden Verfasser (Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, Am. M. S. **36** (1934), S. 711—730) enthält Stetigkeitssätze, die denen in §§ 5 und 7 der vorliegenden Arbeit verwandt sind.

[3]) Zum Beweise von Satz 23 vgl. Rajchman und Saks, Sur la dérivabilitée des fonctions monotones, Fund. Math. **4** (1923), S. 204 ff.

[4]) Über Funktionen zweier Veränderlicher von beschränkter Gesamtvariation („beschränkter Variation nach Hardy“) war bisher nur bekannt, daß sie fast überall total differenzierbar im Stolzschen Sinne sind. Vgl. Burkill und Haslam-Jones, Notes on the differentiability . . ., Journal Lond. M. S. **7** (1932), S. 297—305, wo diese Eigenschaft für die noch umfassendere Klasse der Funktionen $f(x, y)$, die nach der Arzelaschen Definition von beschränkter Variation sind, bewiesen wird.

Satz 40 über unser Problem, der von keiner Ableitung Stetigkeit fordert. Am deutlichsten wird seine Tragweite in dem einfachen Falle $k = 2$, für den er als Satz 40a besonders formuliert ist.

Ob bei unbeschränkter Ableitung DX_kF die Sätze 40 und 40a im wesentlichen erhalten bleiben, sei vorläufig dahingestellt; die vorliegende Arbeit wollte sich bewußt nur mit der Integration beschränkter Funktionen befassen. Die mehrdimensionalen Parallelen zu den Perron-Denjoy-Integralen seien daher einer späteren Erörterung vorbehalten.

§ 1. Allgemeine Integraleigenschaften; Integralfunktionen.

Jede sinnvolle Integraldefinition für Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen genügt zwei Forderungen:

1. Aus der Integrierbarkeit von f über das Intervall $[a; b]$ folgt die Integrierbarkeit von f über jedes Teilintervall von $[a; b]$.

2. Stets ist $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$; es ist also $\int$ eine eindimensionale additive Intervallfunktion im Sinne von I, § 2.

Beide Forderungen stellen wir auch an das k-dimensionale Integral einer Funktion $f(X_k)$ über das Intervall $[A_k; B_k]$, das wir zunächst allgemein, ohne auf die verschiedenen Möglichkeiten, es im einzelnen zu definieren, einzugehen, mit $\int X_k f[A_k; B_k]$ bezeichnen.

Forderung 1. *Aus der Existenz von* $\int X_k f[A_k; B_k]$ *folgt die Existenz von* $\int X_k f$ *über alle (auch die degenerierten) Teilintervalle von* $[A_k; B_k]$.

Forderung 2. *Die Intervallfunktion* $\int X_k f$ *ist additiv im Sinne von* I, § 2. *Es ist also stets*

$$(1) \qquad \int X_k f[A_k; B_k - b_\nu, x_\nu] + \int X_k f[A_k - a_\nu, x_\nu; B_k] = \int X_k f[A_k; B_k].$$

Jede Integraldefinition ergibt daher nach I (6) und I (6a) eine vektorielle Intervallfunktion, die nach I (7) auch k-dimensional ist in dem Sinne, daß sie über degenerierte Intervalle verschwindet. Wir erhalten aus I, § 2

$$(2) \qquad \int X_k f[A_k - A^*_{kr}, B^*_{kr}; A^*_{kr}, B_k - B^*_{kr}] = (-1)^r \int X_k f[A_k; B_k], \text{ speziell}$$

$$(2a) \qquad \int X_k f[B_k; A_k] = (-1)^k \int X_k f[A_k; B_k] \quad \text{und}$$

$$(3) \qquad \int X_k f[A_k; a_\nu, B_k - b_\nu] = 0.$$

Ist nun $f(X_k)$ über $[A_k; B_k]$ integrierbar und P_k irgendein Punkt von $[A_k; B_k]$, so definiert $\int X_k f[P_k; X_k]$ in $[A_k; B_k]$ eine Punktfunktion $F(X_k)$. Wir nennen dann $F(X_k)$ eine X_k-Integralfunktion von $f(X_k)$.

Offenbar ist $F(X_k)$ aus $\int X_k f$ auf demselben Wege entstanden wie $\chi(X_k)$ in I, Satz 10 aus Ψ_k. Dieser Satz ergibt jetzt

Satz 1. *Ist* $f(X_k)$ *über* $[A_k; B_k]$ *integrierbar und* $F(X_k)$ *eine* X_k*-Integralfunktion von* $f(X_k)$, *so ist* $\int X_k f[U_k; V_k] = \Delta_k F[U_k; V_k]$ *für jedes Teilintervall* $[U_k; V_k]$ *von* $[A_k; B_k]$.

Dieser Satz gibt uns also die Möglichkeit, ein Integral $\int X_k f$ über ein Intervall als Δ_k-Funktion einer Integralfunktion von f über dasselbe Intervall auszuwerten.

Für zwei verschiedene X_k-Integralfunktionen F_1 und F_2 von f erhält man aus Satz 1 und I (18) die Beziehung $\Delta_k(F_1 - F_2) = 0$ über jedes Intervall. Das ergibt aber $DX_k(F_1 - F_2) = 0$ überall in $[A_k; B_k]$, so daß man nach I, Satz 15 erhält

Satz 2. *Zwei X_k-Integralfunktionen von $f(X_k)$ unterscheiden sich höchstens um eine Summe von k nach je einer Veränderlichen konstanten Funktionen.*

Nach Satz 1 ist insbesondere

$$F(X_k) = \int X_k f[P_k; X_k] = \Delta_k F[P_k; X_k], \tag{4}$$

was man auch direkt aus I (13) und der für $r < k$ gültigen Beziehung

$$F(X_{kr}^*, P_k - P_{kr}^*) = 0 \tag{5}$$

erhalten kann. Aus (4) und I, Satz 9 folgt weiter

Satz 3. *Eine in $[A_k; B_k]$ überall k-dimensional nach X_k differenzierbare X_k-Integralfunktion ist in $[A_k; B_k]$ stetig.*

Bemerkung. Für $k = 1$ ist dieser Satz trivial; für $k \geqq 2$ ist er es nicht, da im allgemeinen aus der k-dimensionalen Differenzierbarkeit nach X_k nur die Δ_k-Stetigkeit nach X_k folgt.

Nun fügen wir noch hinzu[5])

Forderung 3. *Aus der Integrierbarkeit von f_1 und f_2 folgt die Integrierbarkeit von $f_1 \pm f_2$.*

Damit können wir zu einer Identität gelangen, die wir später benötigen. Es sei $f(X_k)$ nach X_k integrierbar und $F(X_k)$ eine X_k-Integralfunktion von $f(X_k)$; dazu seien ein festes Intervall $[A_k; B_k]$ und ein Konstantenkomplex H_k wie in I, Satz 12 gegeben. Dann behaupten wir

$$\Delta_k(\int X_k f[X_k; (X + H)_k])\,[A_k; B_k] = \int X_k(\Delta_k f[X_k; (X + H)_k])\,[A_k; B_k]. \tag{6}$$

Das Integral rechts existiert nach Forderung 3, da der Integrand eine Summe von 2^k integrierbaren Funktionen ist; eine seiner X_k-Integralfunktionen ist $\Delta_k F[X_k; (X + H)_k]$. Nach Satz 1 geht damit (6) über in die Identität

$$\Delta_k(\Delta_k F[X_k; (X + H)_k])\,[A_k; B_k] = \Delta_k(\Delta_k F[X_k; (X + H)_k])\,[A_k; B_k],$$

womit alles bewiesen ist.

§ 2. Das mehrdimensionale Riemannintegral.

Da jede Riemann-integrierbare Funktion beschränkt ist, betrachten wir von vornherein nur beschränkte Funktionen $f(X_k)$.

Wir bezeichnen mit $\underline{M} f[A_k; B_k]$ die untere, mit $\overline{M} f[A_k; B_k]$ die obere Grenze von f in $[A_k; B_k]$ und mit

$$\Omega f[A_k; B_k] = \overline{M} f[A_k; B_k] - \underline{M} f[A_k; B_k] \tag{7}$$

ihre nie negative Schwankung in $[A_k; B_k]$. Es sind also $\underline{M} f$, $\overline{M} f$ und Ωf skalare Intervallfunktionen.

Um im folgenden, wenn nötig, die Orientierung eines Intervalles charakterisieren zu können, ordnen wir den positiv orientierten Intervallen die geraden ganzen Zahlen, den negativ orientierten die ungeraden ganzen Zahlen als *Intervallexponenten* zu; ist e ein Exponent von $[A_k; B_k]$, so schreiben wir das Intervall $[A_k; B_k]^e$. Offenbar gibt das Vorzeichen $(-1)^e$ die Orientierung des Intervalles an. Zerlegen wir X_k in die beiden komplementären Komplexe X_{kr}^* und $X_k - X_{kr}^*$, so erhalten wir aus I (21)

Satz 4. *Aus $[A_{kr}^*; B_{kr}^*]^{e_r}$ und $[A_k - A_{kr}^*; B_k - B_{kr}^*]^{e_k - r}$ folgt $[A_k; B_k]^{e_r + e_{k-r}}$.*

---

[5]) Neuerdings haben M. D. Kennedy und S. Pollard (Upper and lower integrals, Math. Ztschr. **39** (1934), S. 432–454) eine Integraldefinition aufgestellt, welche der Forderung 3 *nicht* genügt. Es ist daher wesentlich, daß die Sätze 1–3 ohne diese Forderung auskommen.

Nun sei $[U_k^\mu; V_k^\mu]^e$ mit $1 \leqq \mu \leqq m$ eine Gitterzerlegung von $[A_k; B_k]^e$, dann nehmen wir aus jedem Gitterintervall $[U_k^\mu; V_k^\mu]^e$ einen Funktionswert $f(X_k^\mu)$ und bilden die Summe

$$(8) \qquad \Sigma = \sum_{\mu=1}^{m} f(X_k^\mu)\, \Delta_k \psi_k [U_k^\mu; V_k^\mu]^e,$$

deren Wert zwischen den beiden Summen

$$(8a) \quad \underline{\Sigma} = \sum_{\mu=1}^{m} \underline{M} f [U_k^\mu; V_k^\mu]^e\, \Delta_k \psi_k [U_k^\mu; V_k^\mu]^e; \quad \overline{\Sigma} = \sum_{\mu=1}^{m} \overline{M} f [U_k^\mu; V_k^\mu]^e\, \Delta_k \psi_k [U_k^\mu; V_k^\mu]^e$$

liegt. Für jede Gitterzerlegung ist

$$(9) \quad (-1)^e \underline{M} f [A_k; B_k]^e\, \Delta_k \psi_k [A_k; B_k]^e \leqq (-1)^e \underline{\Sigma} \leqq (-1)^e \Sigma \leqq (-1)^e \overline{\Sigma} \leqq (-1)^e \overline{M} f [A_k; B_k]^e\, \Delta_k \psi_k [A_k; B_k]^e.$$

Die nach (9) vorhandene obere Grenze aller Summen $(-1)^e \underline{\Sigma}$ bezeichnen wir mit $(-1)^e \underline{RX_k} f [A_k; B_k]^e$ und nennen $\underline{RX_k} f [A_k; B_k]$ das $\underline{RX_k}$-Integral von f in $[A_k; B_k]$; die untere Grenze der Summen $(-1)^e \overline{\Sigma}$ bezeichnen wir mit $(-1)^e \overline{RX_k} f [A_k; B_k]^e$ und nennen $\overline{RX_k} f [A_k; B_k]$ das $\overline{RX_k}$-Integral von f in $[A_k; B_k]$. Aus (9) erhält man

$$(10) \qquad (-1)^e \underline{RX_k} f [A_k; B_k]^e \leqq (-1)^e \overline{RX_k} f [A_k; B_k]^e.$$

Durch unsere vektorielle Festlegung von $\underline{RX_k} f$ und $\overline{RX_k} f$ haben wir erreicht, daß diese beiden Integrale die drei in § 1 an $\int X_k$ gestellten Forderungen erfüllen, wie man sich leicht überzeugen kann. Alle dort für $\int X_k$ und in I, § 2 für Ψ_k aufgefundenen Beziehungen gelten somit auch für diese beiden Integrale.

Wir gehen jetzt von einem festen Punkte P_k in $[A_k; B_k]$ aus und bilden nach § 1 die beiden X_k-Integralfunktionen $\underline{F}(X_k) = \underline{RX_k} f [P_k; X_k]$ und $\overline{F}(X_k) = \overline{RX_k} f [P_k; X_k]$. Von beiden weisen wir Stetigkeit in $[A_k; B_k]$ nach.

Es sei Q_k ein fester, X_k ein beweglicher Punkt in $[A_k; B_k]$. Nach (4) erhält man

$$(11) \qquad \underline{F}(Q_k) = \Delta_k \underline{F} [P_k; Q_k]; \quad \underline{F}(X_k) = \Delta_k \underline{F} [P_k; X_k].$$

Aus I (5) folgt unter Benutzung von I (6a)

$$\Delta_k \underline{F} [P_k; X_k] = \Delta_k \underline{F} [P_k; Q_k] - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \Delta_k \underline{F} [X_k; P_{kr}, Q_k - Q_{kr}].$$

Dies geht nach (11) und Satz 1 über in

$$(12) \qquad \underline{F}(X_k) = \underline{F}(Q_k) - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r\, \underline{RX_k} f [X_k; P_{kr}, Q_k - Q_{kr}].$$

Nun ist f beschränkt, also $|f| < c$, so daß für jeden Summanden von S die Abschätzung gilt

$$(13) \qquad |\underline{RX_k} f [X_k; P_{kr}, Q_k - Q_{kr}]| < c\, |\Delta_k \psi_k [X_k; P_{kr}, Q_k - Q_{kr}].$$

Für $r < k$ ist wegen I (21) stets $\lim\limits_{X_k \to Q_k} \Delta_k \psi_k [X_k; P_{kr}, Q_k - Q_{kr}] = 0$; hieraus ergibt sich wegen (12) und (13) sofort $\lim\limits_{X_k \to Q_k} \underline{F}(X_k) = \underline{F}(Q_k)$.

Da wir den Beweis auf $\overline{F}(X_k)$ übertragen können, haben wir damit

Satz 5. *Jede $\underline{RX_k}$-Integralfunktion und jede $\overline{RX_k}$-Integralfunktion einer in $[A_k; B_k]$ beschränkten Funktion $f(X_k)$ ist in $[A_k; B_k]$ stetig.*

Wir teilen jetzt X_k in zwei komplementäre Komplexe X_{kr}^* und $X_{k-r}^* = X_k - X_{kr}^*$ und betrachten die Funktion $\underline{f}_{k-r}^*(X_{k-r}^*) = \underline{RX_{kr}^*} f [A_{kr}^*; B_{kr}^* \mid X_{k-r}^*]$, wobei wir im folgenden das Zeichen * weglassen. Es sei $[U_{kr}^\mu; V_{kr}^\mu]^{e_r}$ mit $1 \leqq \mu \leqq m$ eine Gitterzerlegung

von $[A_{kr}; B_{kr}]^{e_r}$ und $[U^{\nu}_{k-r}; V^{\nu}_{k-r}]^{e_{k-r}}$ mit $1 \leqq \nu \leqq n$ eine solche von $[A_{k-r}; B_{k-r}]^{e_{k-r}}$, dann geben beide zusammen eine Gitterzerlegung $[U^{\mu,\nu}_{k}; V^{\mu,\nu}_{k}]^{e_r+e_{k-r}}$ von $[A_k; B_k]^{e_r+e_{k-r}}$. Greifen wir aus der zweiten Zerlegung ein festes Gitterintervall $[\overline{U}^{\nu}_{k-r}; \overline{V}^{\nu}_{k-r}]^{e_{k-r}}$ heraus und aus $[\overline{U}^{\nu}_{k-r}; \overline{V}^{\nu}_{k-r}]^{e_{k-r}}$ einen Punkt $\overline{X}^{\nu}_{k-r}$, so ist

$$(-1)^{e_r} \sum_{\mu=1}^{m} \underline{M} f[U^{\mu}_{kr}, \overline{U}^{\nu}_{k-r}; V^{\mu}_{kr}, \overline{V}^{\nu}_{k-r}]\, \Delta_r \psi_r [U^{\mu}_{kr}; V^{\mu}_{kr}]^{e_r}$$

$$\leqq (-1)^{e_r} \sum_{\mu=1}^{m} \underline{M} f[U^{\mu}_{kr}; V^{\mu}_{kr} \mid \overline{X}^{\nu}_{k-r}]\, \Delta_r \psi_r [U^{\mu}_{kr}; V^{\mu}_{kr}]^{e_r}$$

$$\leqq (-1)^{e_r} \underline{RX}_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} \mid \overline{X}^{\nu}_{k-r}]^{e_r} = (-1)^{e_r} \underline{f}_{k-r}(\overline{X}^{\nu}_{k-r}).$$

Da $\overline{X}^{\nu}_{k-r}$ ein beliebiger Punkt von $[\overline{U}^{\nu}_{k-r}; \overline{V}^{\nu}_{k-r}]$ war, dürfen wir in der letzten Abschätzung $\underline{f}_{k-r}(\overline{X}^{\nu}_{k-r})$ durch $\underline{M} f_{k-r}[\overline{U}^{\nu}_{k-r}; \overline{V}^{\nu}_{k-r}]$ ersetzen, und erhalten durch Multiplikation mit $(-1)^{e_{k-r}} \Delta_{k-r} \psi_{k-r}[\overline{U}^{\nu}_{k-r}; \overline{V}^{\nu}_{k-r}]^{e_{k-r}} > 0$, wobei wir noch $e_r + e_{k-r} = e_k$ setzen und Satz 4 benutzen,

$$(14) \quad (-1)^{e_k} \sum_{\mu=1}^{m} \underline{M} f[U^{\mu}_{kr}, \overline{U}^{\nu}_{k-r}; V^{\mu}_{kr}, \overline{V}^{\nu}_{k-r}]\, \Delta_k \psi_k [U^{\mu}_{kr}, \overline{U}^{\nu}_{k-r}; V^{\mu}_{kr}, \overline{V}^{\nu}_{k-r}]^{e_k}$$

$$\leqq (-1)^{e_k} \underline{M} f_{k-r}[\overline{U}^{\nu}_{k-r}; \overline{V}^{\nu}_{k-r}] \Delta_{k-r} \psi_{k-r}[\overline{U}_{k-r}; \overline{V}_{k-r}]^{e_{k-r}}.$$

Nun summieren wir (14) über alle Werte von ν und erhalten

$$(15) \quad (-1)^{e_k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \underline{M} f[U^{\mu,\nu}_{k}; V^{\mu,\nu}_{k}]\, \Delta_k \psi_k [U^{\mu,\nu}_{k}; V^{\mu,\nu}_{k}]^{e_k}$$

$$\leqq (-1)^{e_k} \sum_{\nu=1}^{n} \underline{M} f_{k-r}[U^{\nu}_{k-r}; V^{\nu}_{k-r}]\, \Delta_{k-r} \psi_{k-r} [U^{\nu}_{k-r}; V^{\nu}_{k-r}].$$

Die Abschätzung (15) gilt auch für die oberen Grenzen beider Seiten bei beliebiger Veränderung der Gitterzerlegung, also

$$(16) \quad (-1)^{e_k} \underline{RX}_k f[A_k; B_k]^{e_k} \leqq (-1)^{e_k} \underline{RX}_{k-r} \underline{f}_{k-r}[A_{k-r}; B_{k-r}].$$

Da wir für $\bar{f}_{k-r}(X_{k-r}) = \overline{RX}_{k-r} f[A_{kr}; B_{kr} \mid X_{k-r}]$ entsprechend erhalten

$$(17) \quad (-1)^{e_k} \overline{RX}_k f[A_k; B_k]^{e_k} \geqq (-1)^{e_k} \overline{RX}_{k-r} \bar{f}_{k-r}[A_{k-r}; B_{k-r}],$$

so können wir (16) und (17) zusammenfassen zu

Satz 6. *Es sei $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ beschränkt, und $\underline{f}_{k-r}(X_{k-r}) = \underline{RX}_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} \mid X_{k-r}]$ sowie $\bar{f}_{k-r}(X_{k-r}) = \overline{RX}_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} \mid X_{k-r}]$, dann ist*

$$(-1)^{e_k} \underline{RX}_k f[A_k; B_k]^{e_k} \leqq (-1)^{e_k} \underline{RX}_{k-r} \underline{f}_{k-r}[A_{k-r}; B_{k-r}]$$

$$\leqq (-1)^{e_k} \overline{RX}_{k-r} \bar{f}_{k-r}[A_{k-r}; B_{k-r}] \leqq (-1)^{e_k} \overline{RX}_k f[A_k; B_k]^{e_k}.$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir nun solche Funktionen f, für welche $\underline{RX}_k f[A_k; B_k] = \overline{RX}_k f[A_k; B_k]$ ist; die also nur *ein* RX_k-Integral besitzen, das wir mit $RX_k f[A_k; B_k]$ bezeichnen. In diesem Falle konvergieren wegen (9) auch alle durch (8) definierten Summen Σ nach $RX_k f[A_k; B_k]$, wenn nur die maximale Kantenlänge der Gitterintervalle nach Null strebt. Die Funktion f selbst heißt dann *RX_k-integrierbar in $[A_k; B_k]$*; ihr RX_k-Integral erfüllt die Forderungen von § 1. Aus Satz 5 folgern wir

Satz 7. *Die Funktion $f(X_k)$ sei RX_k-integrierbar in $[A_k; B_k]$. Dann ist jede RX_k-Integralfunktion von f in $[A_k; B_k]$ stetig.*

Der eben bewiesene Satz 6 geht über in

Satz 8. *Es existiere $RX_k f[A_k; B_k]$ und es sei $f_{k-r}(X_{k-r})$ eine Funktion, welche den Bedingungen*

$$(-1)^e \underline{RX}_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} \mid X_{k-r}]^e \leqq (-1)^e f_{k-r}(X_{k-r}) \leqq (-1)^e \overline{RX}_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} \mid X_{k-r}]^e$$

genügt. Dann existiert $RX_{k-r} f_{k-r}[A_{k-r}; B_{k-r}]$ *und ist gleich* $RX_k f[A_k; B_k]$.

Ohne Beweis fügen wir noch hinzu den bekannten [6])

Satz 9. *Eine Funktion* $f(X_k)$ *ist genau dann* RX_k*-integrierbar in* $[A_k; B_k]$, *wenn die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte in* $[A_k; B_k]$ *das k-dimensionale Maß Null hat.*

Aus (9) folgt der vektorielle Mittelwertsatz

Satz 10. *Es existiere* $RX_k f[A_k; B_k]^e$. *Dann ist*

$$(-1)^e \underline{M} f[A_k; B_k]^e \, \Delta_k \psi_k[A_k; B_k]^e \leqq (-1)^e RX_k f[A_k; B_k]^e \leqq (-1)^e \overline{M} f[A_k; B_k]^e \, \Delta_k \psi_k[A_k; B_k]^e .$$

Jetzt sind wir in der Lage, den einfachsten Umkehrsatz zu beweisen:

Satz 11 (Umkehrsatz). *In* $[A_k; B_k]$ *sei* $F(X_k)$ *eine Integralfunktion der* RX_k*-integrierbaren Funktion* $f(X_k)$. *Dann ist in allen Stetigkeitspunkten von f die Ableitung* $DX_k F$ *vorhanden und gleich f.*

Es sei Q_k ein Stetigkeitspunkt von f. Nach Satz 10 und Satz 1 ist

$$\underline{M} f[Q_k; X_k]^e \leqq \frac{\Delta_k F[Q_k; X_k]^e}{\Delta_k \psi_k[Q_k; X_k]^e} \leqq \overline{M} f[Q_k; X_k]^e . \tag{18}$$

Wegen der Stetigkeit von f in Q_k ist aber

$$\lim_{X_k \to Q_k} \underline{M} f[Q_k; X_k] = \lim_{X_k \to Q_k} \overline{M} f[Q_k; X_k] = f(Q_k),$$

so daß nun (18) sofort

$$\lim_{X_k \to Q_k} \frac{\Delta_k F[Q_k; X_k]}{\Delta_k \psi_k[Q_k; X_k]} = f(Q_k)$$

ergibt.

Korollar 1 zu Satz 11. *Fast überall* [7]) *in* $[A_k; B_k]$ *ist* $DX_k F$ *vorhanden und gleich f.*

Folgt aus den Sätzen 11 und 9.

Korollar 2 zu Satz 11. *Jede* RX_k*-Integralfunktion einer in* $[A_k; B_k]$ *stetigen Funktion* $f(X_k)$ *besitzt überall in* $[A_k; B_k]$ *die Ableitung* $DX_k F(X_k) = f(X_k)$.

Wir kehren nun wieder zu der Spaltung von X_k in zwei komplementäre Komplexe X_{kr} und X_{k-r} zurück und untersuchen die beiden Funktionen

$$\underline{f}_{k-r}(X_{k-r}) = \underline{RX}_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} \mid X_{k-r}] \quad \text{und} \quad \overline{f}_{k-r}(X_{k-r}) = \overline{RX}_{k-r} f[A_{kr}; B_{kr} \mid X_{k-r}]$$

unter der Voraussetzung, daß $RX_k f[A_k; B_k]$ existiert. Dann sind nach Satz 8 diese beiden Funktionen RX_{k-r}-integrierbar in $[A_{k-r}; B_{k-r}]$ und wir erhalten nach demselben Satze

$$RX_{k-r}(\overline{f}_{k-r} - \underline{f}_{k-r})[A_{k-r}; B_{k-r}] = 0. \tag{19}$$

Berücksichtigt man noch, daß $\overline{f}_{k-r} - \underline{f}_{k-r}$ in $[A_{k-r}; B_{k-r}]$ das Vorzeichen nicht wechselt, so ergibt sich fast überall in $[A_{k-r}; B_{k-r}]$ die Gleichung $\overline{f}_{k-r} = \underline{f}_{k-r}$, also der

Satz 12. *Existiert* $RX_k f[A_k; B_k]$, *so existiert auch* $RX_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} \mid X_{k-r}]$ *fast überall in* $[A_{k-r}; B_{k-r}]$.

---

[6]) Zum Beweise vgl. etwa E. Kamke, Das Lebesguesche Integral (Leipzig 1925), S. 67 und 48—50. Der dort für $k = 1$ geführte Beweis ist auch für $k > 1$ gültig.

[7]) *Fast überall in einem Intervall r-ter Dimension* bedeutet: in allen Punkten des Intervalles abgesehen von einer Menge mit dem *r-dimensionalen* Maß Null.

Nach diesem Satze ist die Funktion $f_{k-r}(X_{k-r})$ des Satzes 8 fast überall in $[A_{k-r}; B_{k-r}]$ eindeutig bestimmt.

Nun sei P_k ein fester Punkt von $[A_k; B_k]$, dann ändern wir die Bedeutung von $\underline{f}_{k-r}$ jetzt dahin ab, daß wir als Anfangspunkt des Integrationsintervalles an Stelle des Punktes A_{kr} den Punkt P_{kr} wählen, außerdem wollen wir den Endpunkt veränderlich lassen, wodurch $\underline{f}_{k-r}$ eine Funktion von X_k wird, die definiert ist durch

$$\underline{f}_{k-r}(X_k) = \underline{RX}_{kr} f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_{k-r}]. \tag{20}$$

Daß diese Funktion überall in $[A_k; B_k]$ stetig nach X_{kr} ist, folgt aus Satz 5; bei festgehaltenem $X_{k-r} = \bar{X}_{k-r}$ ist sie im Intervall $[A_{kr}; B_{kr} \mid \bar{X}_{k-r}]$ sogar gleichmäßig stetig nach X_{kr}, da dieses Intervall ja abgeschlossen ist. Wir wollen aber noch mehr beweisen, nämlich daß $\underline{f}_{k-r}$ im ganzen Intervall $[A_k; B_k]$ gleichmäßig stetig nach X_{kr} ist.

Zunächst ist $\underline{f}_{k-r}$ in $[A_k; B_k]$ jedenfalls beschränkt, da stets

$$(-1)^e \underline{M} f[A_k; B_k] \Delta_r \psi_r[A_{kr}; B_{kr}]^e \leqq (-1)^e \underline{f}_{k-r} \leqq (-1)^e \overline{M} f[A_k; B_k] \Delta_r \psi_r[A_{kr}; B_{kr}]^e$$

ist; es sei also $|\underline{f}_{k-r}| < c$. Ist nun Q_k ein beliebiger Punkt von $[A_k; B_k]$, so erhalten wir in vollständiger Analogie zu (12) und (13), wobei wir noch I (12) benutzen,

$$\begin{aligned} |\underline{f}_{k-r}(X_{kr}, Q_{k-r}) - \underline{f}_{k-r}(Q_k)| &\leqq c \sum_{s=0}^{r-1} |\Delta_s \psi_s[X_{krs}; P_{krs}] \Delta_{r-s} \psi_{r-s}[X_{kr} - X_{krs}; Q_{kr} - Q_{krs}]| \\ &\leqq c \sum_{s=0}^{r=1} |\Delta_s \psi_s[A_{krs}; B_{krs}] \Delta_{r-s} \psi_{r-s}[X_{kr} - X_{krs}; Q_{kr} - Q_{krs}]|. \end{aligned} \tag{21}$$

Setzen wir $c \operatorname{Max} |\Delta_s \psi_s[A_{krs}; B_{krs}]| = c_1$, so geht (21) über in

$$\begin{aligned} |\underline{f}_{k-r}(X_{kr}, Q_{k-r}) - \underline{f}_{k-r}(Q_k)| &\leqq c_1 \sum_{s=0}^{r-1} |\Delta_{r-s} \psi_{r-s}[X_{kr} - X_{krs}; Q_{kr} - Q_{krs}]| \\ &= c_1 \sum_{s=1}^{r} |\Delta_s \psi_s[X_{krs}; Q_{krs}]|. \end{aligned} \tag{22}$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir eine Zahl δ zwischen 0 und 1 so, daß sie der Bedingung $\delta \leqq \dfrac{\varepsilon}{2^r c_1}$ genügt. Für $|X_{krs} - Q_{krs}| < \delta$ ist dann $|\Delta_s \psi_s[X_{krs}; Q_{krs}]| < \delta^s < \delta$, nach (22) also

$$|\underline{f}_{k-r}(X_{kr}, Q_{k-r}) - \underline{f}_{k-r}(Q_k)| < 2^r c_1 \delta \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad |X_{kr} - Q_{kr}| < \delta(\varepsilon, c_1).$$

Da die letzte Bedingung von der Lage des Punktes Q_k unabhängig ist, haben wir unser Ziel erreicht:

Satz 13. *Ist $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ beschränkt, so sind die beiden Funktionen*

$$\underline{f}_{k-r}(X_k) = \underline{RX}_{kr} f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_{k-r}] \quad \text{und} \quad \bar{f}_{k-r}(X_k) = \overline{RX}_{kr} f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_{k-r}]$$

in $[A_k; B_k]$ gleichmäßig nach X_{kr} stetig.

Für $\bar{f}_{k-r}$ läßt sich nämlich der Beweis in derselben Weise führen.

Jetzt sei $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ auch RX_k-integrierbar und $f_{k-r}(X_k)$ eine in $[A_k; B_k]$ nach X_{kr} gleichmäßig stetige Funktion, die den Bedingungen

$$(-1)^e \underline{RX}_{kr} f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_{k-r}]^e \leqq (-1)^e f_{k-r}(X_k) \leqq (-1)^e \overline{RX}_{kr} f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_{k-r}]^e \tag{23}$$

genügt. Die Existenz solcher Funktionen ist durch Satz 13 verbürgt; übrigens ist f_{k-r} wegen Satz 12 fast überall in $[A_k; B_k]$ eindeutig bestimmt. Für eine derartige Funktion gilt der

Satz 14. *Es existiere* $RX_k f[A_k; B_k]$ *und die Funktion* $f_{k-r}(X_k)$ *genüge den Bedingungen* (23), *außerdem sei sie in* $[A_k; B_k]$ *nach* X_{kr} *gleichmäßig stetig. Dann ist* f_{k-r} *fast überall in* $[A_k; B_k]$ *stetig.*

Bei festgehaltenem $X_{kr} = \bar{X}_{kr}$ existieren nämlich die Integrale

$$RX_{k-r} f_{k-r}[P_{k-r}; X_{k-r} \mid \bar{X}_{kr}]$$

für jeden Wert von X_{k-r}, also existiert nach I (5) auch

$$RX_{k-r} f_{k-r}[A_{k-r}; B_{k-r} \mid \bar{X}_{kr}] = \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s RX_{k-r} f_{k-r}[P_{k-r}; A_{(k-r)s}, B_{k-r} - B_{(k-r)s} \mid \bar{X}_{kr}].$$

Daraus folgt nach Satz 9, daß f_{k-r} fast überall auf $[A_{k-r}; B_{k-r} \mid X_{kr}]$ nach X_{k-r} stetig ist. Ist nun Q_k ein solcher Stetigkeitspunkt nach X_{k-r} und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann läßt sich eine Zahl $\delta_1 > 0$ finden, für die

$$(24) \quad |f_{k-r}(Q_{kr}, X_{k-r}) - f_{k-r}(Q_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ gilt, wenn } |X_{k-r} - Q_{k-r}| < \delta_1 \text{ ist.}$$

Außerdem gibt es nach Satz 13 eine Zahl $\delta_2 > 0$, unabhängig von X_{k-r}, für die

$$(25) \quad |f_{k-r}(X_k) - f_{k-r}(Q_{kr}, X_{k-r})| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ gilt, wenn } |X_{kr} - Q_{kr}| < \delta_2 \text{ ist.}$$

Aus (24) und (25) folgt

$$|f_{k-r}(X_k) - f_{k-r}(Q_k)| < \varepsilon, \quad \text{wenn} \quad |X_k - Q_k| < \text{Min}(\delta_1, \delta_2) \text{ ist,}$$

so daß also f_{k-r} in Q_k stetig ist.

Umgekehrt ist f_{k-r} in jedem Stetigkeitspunkt a fortiori auch stetig nach X_{k-r}, so daß die Menge $\mathfrak{M}_{k-r}$ der Stetigkeitspunkte mit der Menge der Stetigkeitspunkte nach X_{k-r} übereinstimmt. Weil nun $\mathfrak{M}_{k-r}$ jedes Intervall $[A_{k-r}; B_{k-r} \mid X_{kr}]$ bis auf eine Menge vom $(k-r)$-dimensionalen Maße Null überdeckt, so ist f_{k-r} in $[A_k; B_k]$ punktiert unstetig, woraus die k-dimensionale Meßbarkeit von $\mathfrak{M}_{k-r}$ folgt. Über die komplementäre Menge $\mathfrak{M}'_{k-r}$ der Unstetigkeitspunkte von f_{k-r} wissen wir somit:

1. $\mathfrak{M}'_{k-r}$ hat auf jedem $(k-r)$-dimensionalen Intervallschnitt $[A_{k-r}; B_{k-r} \mid X_{kr}]$ das $(k-r)$-dimensionale Maß Null;
2. $\mathfrak{M}'_{k-r}$ ist k-dimensional meßbar.

Diese beiden Eigenschaften zusammen ergeben, daß $\mathfrak{M}'_{k-r}$ das k-dimensionale Maß Null hat, womit Satz 14 bewiesen ist.

Kehren wir nun wieder zu der Funktion $F(X_k) = RX_k f[P_k; X_k]$ zurück, so können wir, da ja nach Satz 8 überall $RX_{k-r} f_{k-r}[P_{k-r}; X_{k-r} \mid X_{kr}] = F(X_k)$ existiert, auf ihr Verhalten zu $f_{k-r}(X_k)$ den Satz 11 anwenden. Dieser ergibt, daß auf der Menge $\mathfrak{M}_{k-r}$ die Ableitung $DX_{k-r}F$ existiert und gleich f_{k-r} ist:

$$(26) \qquad DX_{k-r}F = f_{k-r} \quad \text{auf } \mathfrak{M}_{k-r}, \text{ fast überall in } [A_k; B_k].$$

Danach ist f_{k-r} auf $\mathfrak{M}_{k-r}$ eindeutig bestimmt; das bedeutet aber:

$$(26\,a) \quad RX_{kr} f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_{k-r}] \quad \text{existiert auf } \mathfrak{M}_{k-r}, \text{ fast überall in } [A_k; B_k].$$

Die beiden Beziehungen (26) und (26 a) bleiben auch für $r = 0$ und $r = k$ richtig, wenn wir unter $DX_{k-k}F$ die Funktion F und unter $RX_{k0}f$ die Funktion f selbst verstehen. Auf dem Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller 2^k Mengen $\mathfrak{M}_{k-r}$, also wieder fast überall in $[A_k; B_k]$, gelten dann (26) und (26 a) für jeden Komplex X_{kr}; wegen (26) ist somit F auf $\mathfrak{D}$ total k-dimensional differenzierbar. Damit haben wir

Satz 15 (Hauptsatz für RX_k-Integrale).
Es existiere $RX_kf[A_k; B_k]$ und es sei $F(X_k) = RX_kf[P_k; X_k]$ eine RX_k-Integralfunktion von $f(X_k)$. Dann ist auf einer Menge $\mathfrak{M}$ fast überall in $[A_k; B_k]$ die Funktion F total k-dimensional differenzierbar, und zwar ist auf $\mathfrak{M}$ für jeden Komplex X_{kr}

1. *das Integral $RX_{kr}f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_k - X_{kr}]$ vorhanden,*
2. $D(X_k - X_{kr})F(X_k) = RX_{kr}f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_k - X_{rk}]$.

Aus I, Satz 6 erhalten wir hierzu das

Korollar zu Satz 15. *Jede in $[A_k; B_k]$ definierte RX_k-Integralfunktion besitzt fast überall in $[A_k; B_k]$ ein Stolzsches totales Differential.*

Für stetige Funktionen f verändert sich der Satz zu

Satz 15 a. *Jede Integralfunktion $RX_{kr}f[P_{kr}; X_{kr} \mid X_r - X_{kr}]$ einer in $[A_k; B_k]$ stetigen Funktion $f(X_k)$ ist überall in $[A_k; B_k]$ total r-dimensional differenzierbar. Ihre Ableitung nach dem Komplex X_{krs} ist die Integralfunktion $R(X_{kr} - X_{krs})\, f[P_{kr} - P_{krs}; X_{kr} - X_{krs} \mid X_k - X_{krs}]$.*

§ 3. Primitive Funktionen und ihre Ableitungen.

Besteht zwischen zwei Funktionen $F(X_k)$ und $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ die Beziehung $DX_{kr}F = f$, so nennen wir F eine X_{kr}-primitive Funktion von f; wir schreiben diese Umkehrung des r-dimensionalen Differentiationsprozesses

$$F = DX_{kr}^{-1}f. \tag{27}$$

Offenbar hat bei gegebener Funktion f die Gleichung (27) wenn überhaupt eine, dann sogleich unendlich viele Lösungen, die sich nach I, Satz 15 um Summen von r nach je einer Veränderlichen konstanten Funktionen unterscheiden. Zwischen zwei X_k-primitiven Funktionen F_2 und F_1 von $f(X_k)$ bestehen also stets die beiden Beziehungen

$$F_2 = F_1 + \sum_{\nu=1}^{k} g_\nu(X_k - x_\nu), \tag{28}$$

$$\Delta_k F_1[U_k; V_k] = \Delta_k F_2\,[U_k; V_k], \tag{29}$$

letztere über jedes Teilintervall von $[A_k; B_k]$.

Ist f in $[A_k; B_k]$ stetig, so ist nach Satz 11 jede RX_k-Integralfunktion $F_1(X_k)$ von f auch X_k-primitive Funktion von f. Nach Satz 1 und (29) gilt dann für jede andere X_k-primitive Funktion $DX_k^{-1}f$ von f die Beziehung

$$RX_kf[U_k; V_k] = \Delta_k(DX_k^{-1}f)\,[U_k; V_k]. \tag{30}$$

Man kann also eine stetige Funktion mit Hilfe jeder X_k-primitiven Funktion über ein k-dimensionales Intervall integrieren.

Über die Beschaffenheit einer X_k-primitiven Funktion $F = DX_k^{-1}f$ in $[A_k; B_k]$ erhalten wir Auskunft aus I (18) und I, Satz 9. Nach I (18) ist

$$F(X_k) = F(A_k) + \sum_{r=0}^{k-1} \Delta_{k-r}F\,[A_k - A_{kr}; X_k - X_{kr} \mid A_{kr}]; \tag{31}$$

nach I, Satz 9 ist der Summand $\Delta_kF\,[A_k; X_k]$ stetig, und weil die anderen Summanden alle partiell konstant sind, so erhalten wir

Satz 16. *Jede X_k-primitive Funktion läßt sich in ihrem Definitionsintervall als Summe einer stetigen Funktion und k nach je einer Veränderlichen konstanten Funktionen darstellen.*

Aber auch über die Beschaffenheit einer k-dimensionalen Ableitung gibt uns (31) eine wichtige Auskunft. Bezeichnen wir nämlich die stetige Funktion $\Delta_kF[A_k; X_k]$ mit $g(X_k)$, und ist H_k^μ eine Folge von Konstantenkomplexen mit $\lim_{\mu\to\infty} H_k^\mu = 0$, so erhalten

wir aus (31) die Beziehung

$$(32)\quad DX_kF(X_k) = \lim_{\mu\to\infty} \frac{\Delta_k F[X_k;\,(X+H)_k^\mu]}{\Delta_k \psi_k[X_k;\,(X+H)_k^\mu]} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{\Delta_k g[X_k;\,(X+H)_k^\mu]}{\Delta_k \psi_k[X_k;\,(X+H)_k^\mu]}.$$

Danach ist $DX_kF(X_k)$ die Limesfunktion einer Folge stetiger Funktionen, also von der ersten Baireschen Klasse; hieraus folgt

Satz 17. *Besitzt eine Funktion in einem k-dimensionalen Intervall überall eine k-dimensionale Ableitung, so ist diese Ableitung in dem Intervall punktiert unstetig.*

Wendet man I, Satz 14a auf (32) an, so erhält man

$$(33)\qquad DX_kF(X_k) = \lim_{\mu\to\infty} DX_kF(X+\bar{H})_k^\mu,$$

wobei $\bar{H}_k^\mu$ im Intervall $[0_k;\,H_k^\mu]$ liegt. Es ist also auch $\lim \bar{H}_k^\mu = 0$. Wir wollen, da in der Folge $\bar{H}_k^\mu$ keine einzelne Größe $\bar{h}_\nu^\mu$ bei veränderlichem μ konstant bleibt, die Punkte $(X+\bar{H})_k^\mu$ eine k-dimensionale Stetigkeitsfolge für X_k nennen, und haben demnach

Satz 18. *Existiert eine k-dimensionale Ableitung in einem k-dimensionalen Intervall, so besitzt sie für jeden Punkt dieses Intervalles eine k-dimensionale Stetigkeitsfolge.*

Aus diesem Satze ergibt sich, wie man leicht nachprüfen kann, daß die untere und die obere Grenze der k-dimensionalen Ableitung in dem abgeschlossenen Definitionsintervall $[A_k;\,B_k]$ mit ihren Grenzen in dem offenen Intervall übereinstimmen, das wir mit $\langle A_k;\,B_k\rangle$ bezeichnen wollen.

Ist nun c irgendeine Zahl zwischen diesen beiden Grenzen, dann gibt es in dem offenen Intervall $\langle A_k;\,B_k\rangle$ zwei vollständig gleich orientierte Intervalle $[U_k;\,V_k]$ und $[\bar{U}_k;\,\bar{V}_k]$, für die

$$(35)\qquad \frac{\Delta_k F[U_k;\,V_k]}{\Delta_k \psi_k[U_k;\,V_k]} < c; \quad \frac{\Delta_k F[\bar{U}_k;\,\bar{V}_k]}{\Delta_k \psi_k[\bar{U}_k;\,\bar{V}_k]} > c$$

gilt. Wir verbinden die beiden Punkte U_k und $\bar{U}_k$ durch eine stetige, nach jeder einzelnen Veränderlichen monotone Kurve $U_k(t)$, die für $0 \leqq t \leqq 1$ definiert sein möge, wobei also $U_k(0) = U_k$ und $U_k(1) = \bar{U}_k$ sei; und durch eine ebensolche Kurve $V_k(t)$ verbinden wir V_k und $\bar{V}_k$. Jedes Intervall $[U_k(t);\,V_k(t)]$ liegt dann in $[A_k;\,B_k]$. Die Funktion $z(t) = \dfrac{\Delta_k F[U_k(t);\,V_k(t)]}{\Delta_k \psi_k[U_k(t);\,V_k(t)]}$ ist also für $0 \leqq t \leqq 1$ definiert[8]) und nach Satz 16 stetig, da ja Δ_k für die partiell konstanten Bestandteile von F verschwindet, und nimmt daher den zwischen $z(0)$ und $z(1)$ gelegenen Wert c für $t = t_1$ an $(0 < t_1 < 1)$. Im Intervall $U_k(t_1);\,V_k(t_1)$ erhalten wir daraus nach I, Satz 14a einen Punkt P_k, für den $DX_kF(P_k) = c$ ist, und haben den

Satz 19. *Eine k-dimensionale Ableitung nimmt in einem k-dimensionalen Existenzintervall jeden Wert zwischen ihrer unteren und ihrer oberen Grenze daselbst an.*

Korollar zu Satz 19. *Existiert die Ableitung $DX_kF(X_k)$ in $[A_k;\,B_k]$, so nimmt $DX_kF(X_k)$ in $[A_k;\,B_k]$ jeden Wert zwischen $DX_kF(A_k)$ und $DX_kF(B_k)$ an.*

§ 4. Monotone Funktionen und Funktionen von beschränkter Variation.

Wir nennen eine Funktion $f(X_k)$ *positiv* (*negativ*) *X_k-monoton in* $[A_k;\,B_k]$, wenn für jedes Teilintervall $[U_k;\,V_k]^e$ von $[A_k;\,B_k]$ die Beziehung

$$(-1)^e\,\Delta_k f[U_k;\,V_k]^e \geqq 0 \;(\leqq 0)$$

[8]) Es lassen sich $U_k(t)$ und $V_k(t)$ stets so (z. B. linear) wählen, daß der Nenner von $z(t)$ nirgends verschwindet.

gilt. Ist $[U_k^\lambda; V_k^\lambda]$ eine Gitterzerlegung von $[A_k; B_k]$, so haben wir nach I (8) für monotone Funktionen die Gleichung

$$\sum_\lambda |\Delta_k f[U_k^\lambda; V_k^\lambda]| = |\Delta_k f[A_k; B_k]|. \tag{36}$$

Wir sagen, eine Funktion $f(X_k)$ sei in $[A_k; B_k]$ *von beschränkter X_k-Variation*, wenn für jede Gitterzerlegung die Summe

$$\sum_\lambda |\Delta_k f[U_k^\lambda; V_k^\lambda]| \tag{36a}$$

beschränkt bleibt; in diesem Falle haben die Summen (36a) eine obere Grenze c. Wir verstehen dann unter der *X_k-Variation von f in* $[A_k; B_k]$ die Größe

$$T_k f[A_k; B_k]^e = (-1)^e c. \tag{37}$$

Aus (36) folgt unmittelbar

Satz 20. *In $[A_k; B_k]$ ist jede X_k-monotone Funktion $f(X_k)$ auch von beschränkter X_k-Variation, und zwar ist $T_k f[A_k; B_k]^e = (-1)^e |\Delta_k f[A_k; B_k]^e|$.*

Stellen die Intervalle $[U_k^\lambda; V_k^\lambda]$ mehrere oder alle Teile einer Gitterzerlegung von $[A_k; B_k]$ vor, so gilt für Funktionen von beschränkter X_k-Variation

$$\sum_\lambda |\Delta_k f[U_k^\lambda; V_k^\lambda]| \leqq |T_k f[A_k; B_k]|, \tag{38}$$

für X_k-monotone Funktionen also

$$\sum_\lambda |\Delta_k f[U_k^\lambda; V_k^\lambda]| \leqq |\Delta_k f[A_k; B_k]|. \tag{38a}$$

Wir weisen jetzt nach, daß $T_k f$ eine additive Intervallfunktion im Sinne von I, § 2 ist; wegen der vektoriellen Definition von $T_k F$ genügt es hierzu, die Richtigkeit von I (1a) für drei positiv orientierte Intervalle festzustellen. Wir behaupten also

$$T_k f[A_k; B_k - b_\nu, c_\nu]^0 + T_k f[A_k - a_\nu, c_\nu; B_k]^0 = T_k f[A_k; B_k]^0. \tag{39}$$

Wir bezeichnen abkürzend die beiden links stehenden Intervalle mit $[\mathfrak{J}_1]^0$ und $[\mathfrak{J}_2]^0$, das rechts stehende mit $[\mathfrak{J}]^0$; $[\mathfrak{J}_1]^0$ und $[\mathfrak{J}_2]^0$ sind Teilintervalle von $[\mathfrak{J}]^0$. Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

1. Wir konstruieren in $[\mathfrak{J}_1]^0$ und in $[\mathfrak{J}_2]^0$ je eine Gitterzerlegung, welche die Werte $\Sigma_1 \geqq 0$ und $\Sigma_2 \geqq 0$ für die Summen (36a) ergeben. Führen wir nun die Zerlegungsschnitte der beiden Gitter durch das ganze Intervall $[\mathfrak{J}]^0$ hindurch, so entsteht eine Gitterzerlegung von $[\mathfrak{J}]^0$ mit dem Wert $\Sigma \geqq 0$ für (36a). Bei der Konstruktion des Gitters in $[\mathfrak{J}]^0$ ist die Anzahl der Gitterintervalle keinesfalls kleiner geworden; daraus folgt $\Sigma_1 + \Sigma_2 \leqq \Sigma$, also auch für die oberen Grenzen

$$T_k f[\mathfrak{J}_1]^0 + T_k f[\mathfrak{J}_2]^0 \leqq T_k f[\mathfrak{J}]. \tag{40a}$$

2. Nehmen wir eine Gitterzerlegung von $[\mathfrak{J}]^0$ mit der Summe Σ', so fügen wir dieser den Schnitt $x_\nu = c_\nu$ hinzu, wenn er noch nicht in ihr enthalten war. Wir bekommen dadurch eine Gitterzerlegung von $[\mathfrak{J}_1]^0$ und $[\mathfrak{J}_2]^0$, deren Summen Σ_1' und Σ_2' seien; wieder ist bei der Konstruktion die Anzahl der Gitterintervalle nicht kleiner geworden, so daß $\Sigma_1' + \Sigma_2' \geqq \Sigma'$ ist, woraus diesmal

$$T_k f[\mathfrak{J}_1]^0 + T_k f[\mathfrak{J}_2]^0 \geqq T_k f[\mathfrak{J}]^0 \tag{40b}$$

folgt. Nunmehr ergeben aber (40a) und (40b) sofort die Richtigkeit von (39); wir dürfen daher auf die Intervallfunktion $T_k f$ die in I für Ψ_k aufgefundenen Relationen anwenden.

Bilden wir von einem festen Punkt P_k in $[A_k; B_k]$ aus die Punktfunktion $g(X_k) = T_k f[P_k; X_k]$, so erhalten wir aus I, Satz 10 und (37) für jedes Teilintervall

$[U_k; V_k]$ von $[A_k; B_k]$ die Gleichung

$$(41) \qquad (-1)^e \Delta_k g[U_k; V_k]^e = (-1)^e T_k f[U_k; V_k]^e \geqq 0.$$

Somit ist $g(X_k)$ eine in $[A_k; B_k]$ positiv X_k-monotone Funktion. Aus I (8), der Definition von $T_k f$ und (41) folgt weiter

$$(42) \qquad |\Delta_k g[U_k; V_k]| \geqq |\Delta_k f[U_k; V_k]|.$$

Wir betrachten nun die Funktionen $f_1 = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}f$ und $f_2 = \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f$; für diese ist nach (41), (42) und I (20)

$$(43) \qquad (-1)^e \Delta_k f_1[U_k; V_k]^e \geqq 0; \quad (-1)^e \Delta_k f_2[U_k; V_k]^e \geqq 0.$$

Beide Funktionen sind demnach in $[A_k; B_k]$ positiv X_k-monoton, und weil $f_2 - f_1 = f$ ist, haben wir den

Satz 21. *Jede Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter X_k-Variation ist, läßt sich darstellen als Differenz zweier in $[A_k; B_k]$ positiv X_k-monotoner Funktionen.*

§ 5. Die Δ_k-Stetigkeit und die k-dimensionale Differenzierbarkeit der Funktionen von beschränkter X_k-Variation.

Wir setzen $\overline{\lim\limits_{X_k \to P_k}} |\Delta_k f[P_k; X_k]| = \delta X_k f(P_k)$ und bezeichnen $\delta X_k f(P_k) \geqq 0$ als die δX_k-Schwankung von f in P_k. Es ist $\delta X_k f(P_k) = 0$, wenn die Funktion Δ_k-stetig in P_k nach X_k ist, und umgekehrt. Wir beweisen

Satz 22. *Eine Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter X_k-Variation ist, ist in $[A_k; B_k]$, abgesehen von einer höchstens abzählbaren Punktmenge, auch Δ_k-stetig nach X_k.*

1. Ist $T_k f[A_k; B_k] = 0$, so ist auch $\Delta_k f[U_k; V_k] = 0$ nach (38) für jedes Teilintervall von $[A_k; B_k]$, somit überall $\delta X_k f = 0$.

2. Es sei $|T_k f[A_k; B_k]| = c > 0$. Ist dann n eine ganze positive Zahl, so gibt es höchstens n Punkte, in denen $\delta X_k f > \frac{c}{n}$ ist. Wir nehmen an, es gäbe $n+1$ derartige Punkte P_k^μ, mit $1 \leqq \mu \leqq n+1$, dann lassen sich $n+1$ paarweise punktfremde Intervalle $[P_k^\mu; Q_k^\mu]$ finden, für die $|\Delta_k f[P_k^\mu; Q_k^\mu]| > \frac{c}{n}$ gilt. Stellen wir mit Hilfe dieser Intervalle (die gegebenenfalls dabei zerschnitten werden müssen) eine Gitterzerlegung von $[A_k; B_k]$ her, so erhalten wir aus (38) die Beziehung

$$|T_k f[A_k; B_k]| \geqq \sum_{\mu=1}^{n+1} |\Delta_k f[P_k^\mu; Q_k^\mu] > \frac{n+1}{n} c > c,$$

im Widerspruch zu der gemachten Annahme $|T_k f[A_k; B_k]| = c$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 23. *Eine Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter X_k-Variation ist, besitzt fast überall in $[A_k; B_k]$ die Ableitung $DX_k f(X_k)$.*

Nach Satz 21 genügt es, den Beweis für eine in $[A_k; B_k]$ positiv X_k-monotone Funktion zu führen; für eine solche ist stets $DX_k f \geqq 0$. Wir setzen noch zur Abkürzung $|\Delta_k f[A_k; B_k]| = \Delta$.

1. *Beweis, daß die Menge $\mathfrak{M}(DX_k f = +\infty)$ das k-dimensionale Maß Null besitzt.*

Wir nehmen an, für das äußere Maß $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$ gelte $\overline{\mathfrak{M}} > 0$. Für jeden Punkt P_k von $\mathfrak{M}$ konstruieren wir innerhalb $[A_k; B_k]$ eine Intervallfolge $[P_k; U_k^\mu]$ mit $U_k^\mu \to P_k$, für die

$$(44) \qquad \frac{\Delta_k f[P_k; U_k^\mu]}{\Delta_k \psi_k[P_k; U_k^\mu]} > \frac{2\Delta}{\overline{\mathfrak{M}}}$$

ist. Hieraus folgt

$$|\Delta_k f[P_k; U_k^\mu] > \frac{2\Delta}{\overline{\mathfrak{M}}} |\Delta_k \psi_k[P_k; U_k^\mu]|. \tag{45}$$

Nach dem Satze von Vitali greifen wir aus der Gesamtheit unserer Intervallfolgen eine endliche Anzahl getrennt liegender Intervalle heraus — ihre Vereinigungsmenge sei $\mathfrak{J}$ —, für welche

$$\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{J}} > \frac{\overline{\mathfrak{M}}}{2} \tag{46}$$

ist. Wir bezeichnen die herausgegriffenen Intervalle mit $[P_k^\lambda; U_k^\lambda]$, wobei $1 \leqq \lambda \leqq n$ sei. Dann ist, unter Benutzung von (46),

$$\sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_k \psi_k[P_k^\lambda; U_k^\lambda]| = \overline{\mathfrak{J}} \geqq \overline{\mathfrak{M}\mathfrak{J}} > \frac{\mathfrak{M}}{2}. \tag{47}$$

Aus (45) und (47) erhalten wir für unsere n Intervalle, die wir wegen ihrer getrennten Lage als (vielleicht zerschnittene) Teile eines Gitters auffassen können,

$$\sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_k f[P_k^\lambda; U_k^\lambda]| > \Delta = |\Delta_k f[A_k; B_k]|, \tag{48}$$

im Widerspruch zu (38a).

2. *Beweis, daß die Menge* $\mathfrak{N}(\overline{DX_k} f > \underline{DX_k} f)$ *das k-dimensionale Maß Null besitzt.*

Wegen der Abzählbarkeit aller rationalen Zahlenpaare genügt der Nachweis, daß die Menge $\mathfrak{N}_1(0 \leqq \underline{DX_k} f < u < v < \overline{DX_k} f)$, wobei u und v zwei feste positive rationale Zahlen sind, das k-dimensionale Maß Null hat.

Wir nehmen an, es sei $\overline{\mathfrak{N}_1} > 0$. Wir überdecken dann $\mathfrak{N}_1$ mit einer offenen Intervallmenge $\mathfrak{J}_1$, deren Maß $|\mathfrak{J}_1|$ die Bedingung

$$|\mathfrak{J}_1| < \overline{\mathfrak{N}_1}(1 + \varepsilon) \tag{49}$$

erfüllt, wobei ε irgendeine Zahl zwischen 0 und 1 sei, also $0 < \varepsilon < 1$. Darauf konstruieren wir innerhalb $\mathfrak{J}_1$ und $[A_k; B_k]$ für jeden Punkt P_k von $\mathfrak{N}_1$ eine Intervallfolge $[P_k; U_k^\mu]$ mit $U_k^\mu \to P_k$, für die

$$|\Delta_k f[P_k; U_k^\mu]| < u |\Delta_k \psi_k[P_k; U_k^\mu]| \tag{50}$$

gilt. Der Satz von Vitali verschafft uns aus der Gesamtheit dieser Intervallfolgen eine endliche Anzahl getrennt liegender Intervalle (Vereinigungsmenge $\mathfrak{J}_2$), für die

$$\overline{\mathfrak{N}_1\mathfrak{J}_2} > \overline{\mathfrak{N}_1}(1 - \varepsilon) \tag{51}$$

gilt; die Intervalle von $\mathfrak{J}_2$ seien $[P_k^\lambda; U_k^\lambda]$, mit $1 \leqq \lambda \leqq l$. Wir erhalten dann unter Berücksichtigung von (49) die Beziehung

$$\sum_{\lambda=1}^{l} |\Delta_k \psi_k[P_k^\lambda; U_k^\lambda]| = |\mathfrak{J}_2| \leqq |\mathfrak{J}_1| < \overline{\mathfrak{N}_1}(1 + \varepsilon); \tag{52}$$

aus (50) und (52) folgt nun

$$\sum_{\lambda=1}^{l} |\Delta_k f[P_k^\lambda; U_k^\lambda]| < u\overline{\mathfrak{N}_1}(1 + \varepsilon). \tag{53}$$

Wir bezeichnen nun die Vereinigungsmenge der l offenen Intervalle $\langle P_k^\lambda; U_k^\lambda\rangle$ mit $\mathfrak{J}_2'$ und setzen $\mathfrak{N}_1\mathfrak{J}_2' = \mathfrak{N}_2$, dann ist wegen $|\mathfrak{J}_2'| = |\mathfrak{J}_2|$ nach (51) auch

$$\overline{\mathfrak{N}_2} > \overline{\mathfrak{N}_1}(1 - \varepsilon). \tag{54}$$

Wegen $\mathfrak{N}_2 < \mathfrak{N}_1$ können wir innerhalb $\mathfrak{J}_2'$ für jeden Punkt Q_k von $\mathfrak{N}_2$ eine Intervallfolge

$[Q_k;\ V_k^u]$ mit $V_k^u \to Q_k$ konstruieren, für die

$$|\Delta_k f[Q_k;\ V_k^u]| > v\,|\Delta_k \psi_k[Q_k;\ V_k^u]| \tag{55}$$

gilt. Der Satz von Vitali verschafft uns aus der Gesamtheit dieser Intervallfolgen eine endliche Anzahl getrennt liegender Intervalle (Vereinigungsmenge $\mathfrak{J}_3$), für die

$$|\mathfrak{J}_3| \geqq \overline{\mathfrak{R}_2\mathfrak{J}_3} > \overline{\mathfrak{R}_2}(1-\varepsilon) \tag{56}$$

ist. Bezeichnen wir noch diese herausgegriffenen Intervalle mit $[Q_k^\nu;\ V_k^\nu]$, wobei $1 \leqq \nu \leqq n$ sei, so erhalten wir aus (54), (55) und (56)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta_k f[Q_k^\nu;\ V_k^\nu]| > v \sum_{\nu=1}^{n} |\Delta_k \psi_k[Q_k^\nu;\ V_k^\nu]| = v|\mathfrak{J}_3| > v\,\overline{\mathfrak{R}_1}(1-2\varepsilon). \tag{57}$$

Nunmehr wählen wir unsere Zahl $\varepsilon > 0$ so klein, daß $u(1+\varepsilon) < v(1-2\varepsilon)$ wird; aus (53) und (57) erhalten wir dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta_k f[Q_k^\nu;\ V_k^\nu]| > \sum_{\lambda=1}^{l} |\Delta_k f[P_k^\lambda;\ U_k^\lambda]|. \tag{58a}$$

Andrerseits erhalten wir aus (38a), weil ja die Intervalle $[Q_k^\nu;\ V_k^\nu]$ in den Intervallen $[P_k^\lambda;\ U_k^\lambda]$ liegen,

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta_k f[Q_k^\nu;\ V_k^\nu]| \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} |\Delta_k f[P_k^\lambda;\ U_k^\lambda]|. \tag{58b}$$

Durch den Widerspruch von (58a) mit (58b) ist somit unser Satz bewiesen.

§ 6. Vollständige Monotonie und beschränkte Gesamtvariation.

Wir nennen eine Funktion $f(X_k)$ *vollständig positiv (negativ) monoton* in $[A_k;\ B_k]$, wenn sie in $[A_k;\ B_k]$ positiv (negativ) X_k-monoton und in jedem Schnitt $[A_{kr};\ B_{kr}|\ X_k - X_{kr}]$ positiv (negativ) X_{kr}-monoton ist.

Ebenso nennen wir $f(X_k)$ eine Funktion *von beschränkter Gesamtvariation* in $[A_k;\ B_k]$, wenn sie in $[A_k;\ B_k]$ von beschränkter X_k-Variation und in jedem Schnitt $[A_{kr};\ B_{kr}|\ X_k - X_{kr}]$ von beschränkter X_{kr}-Variation ist.

Wir kennzeichnen im folgenden ein nach I, § 4 vollständig positiv orientiertes Intervall $[A_k;\ B_k]$ durch $[A_k;\ B_k]^+$ und beweisen jetzt

Satz 24. *Eine Funktion $f(X_k)$ ist schon dann vollständig positiv monoton in $[A_k;\ B_k]^+$, wenn sie in $[A_k;\ B_k]^+$ positiv X_k-monoton und in jedem von A_k ausgehenden Oberflächenintervall $[A_{kr};\ B_{kr}|\ A_k - A_{kr}]^+$ positiv X_{kr}-monoton ist.*

Wir werden sogar mehr zeigen, nämlich daß stets

$$\Delta_r f[U_{kr};\ V_{kr}|\ X_k - X_{kr}]^+ \geqq \Delta_r f[U_{kr};\ V_{kr}|\ A_k - A_{kr}]^+ \geqq 0 \tag{59}$$

gilt, wenn $[U_{kr};\ V_{kr}]^+$ ein Teilintervall von $[A_{kr};\ B_{kr}]^+$ und $X_k - X_{kr}$ ein Punkt in $[A_k - A_{kr};\ B_r - B_{kr}]^+$ ist.

Wir erreichen den Nachweis von (59) durch einen doppelten Induktionsschluß.

1. Für $r = k$ ist (59) richtig.

2. Es sei (59) für $r = \bar{r} + 1$ richtig. Wir werden zeigen, daß unter dieser Voraussetzung der Wert von $\Delta_{\bar{r}} f[U_{k\bar{r}};\ V_{k\bar{r}}|\ A_k - A_{k\bar{r}}]^+$ nie abnimmt, wenn wir sukzessive die $k - \bar{r}$ Werte $A_k - A_{k\bar{r}}$ durch die $k - \bar{r}$ Werte $X_k - X_{k\bar{r}}$ ersetzen. Wir schreiben wieder $X_{k-\bar{r}} = X_k - X_{k\bar{r}}$, ferner sei X_s ein Teilkomplex von $X_k - X_{k\bar{r}}$ und $X_{k-\bar{r}-s} = X_k - X_{k\bar{r}} - X_s$; dann erhalten wir aus I (14)

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar{r}} f[U_{k\bar{r}};\ V_{k\bar{r}}|\ A_{k-\bar{r}-s},\ X_s]^+ &= \Delta_{\bar{r}} f[U_{k\bar{r}};\ V_{k\bar{r}}|\ A_{k-\bar{r}-s},\ a_\nu,\ X_s - x_\nu]^+ \\ &\quad + \Delta_{\bar{r}+1} f[U_{k\bar{r}},\ a_\nu;\ V_{k\bar{r}},\ x_\nu|\ A_{k-\bar{r}-s},\ X_s - x_\nu]^+.\end{aligned} \tag{60}$$

Der letzte Summand ist nach unserer Annahme über $r = \bar{r} + 1$ positiv, unser Ziel ist also mit (60) erreicht.

Für Funktionen von beschränkter Gesamtschwankung haben wir den noch etwas allgemeineren

Satz 25. *Eine Funktion $f(X_k)$ ist schon dann von beschränkter Gesamtvariation in $[A_k; B_k]$, wenn sie in $[A_k; B_k]$ von beschränkter X_k-Variation und in jedem durch einen festen Punkt P_k gehenden Schnitt $[A_{kr}; B_{kr} | P_k - P_{kr}]$ von beschränkter X_{kr}-Variation ist.*

Für $1 \leqq r \leqq k$ ist nach den gemachten Voraussetzungen

$$|T_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} | P_k - P_{kr}]| < c. \tag{61}$$

Unser Ziel ist der Beweis von

$$|T_{kr} f[A_{kr}; B_{kr} | X_k - X_{kr}]| \leqq c_r. \tag{62}$$

1. Für $r = k$ ist (62) nach Voraussetzung richtig.

2. Für $r = \bar{r} + 1$ sei (62) richtig. Ist dann $[U_{k\bar{r}}^{\lambda}; V_{k\bar{r}}^{\lambda} | X_k - X_{k\bar{r}}]$ mit $1 \leqq \lambda \leqq n$ irgendeine Gitterzerlegung von $[A_{k\bar{r}}; B_{k\bar{r}} | X_k - X_{k\bar{r}}]$, so haben wir für die parallele Zerlegung von $[A_{k\bar{r}}; B_{k\bar{r}} | P_k - P_{k\bar{r}}]$ wegen (61) die Abschätzung

$$\sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_{\bar{r}} f[U_{k\bar{r}}^{\lambda}; V_{k\bar{r}}^{\lambda} | P_k - P_{k\bar{r}}]| < c. \tag{63}$$

Aus (60) erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_{\bar{r}} f[U_{k\bar{r}}^{\lambda}; V_{k\bar{r}}^{\lambda} | P_{k-\bar{r}-s}, X_s]| \leqq & \sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_{\bar{r}} f[U_{k\bar{r}}^{\lambda}; V_{k\bar{r}}^{\lambda} | P_{k-\bar{r}-s}, p_\nu, X_s - x_\nu]| \\ & + \sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_{\bar{r}+1} f[U_{k\bar{r}}^{\lambda}, p_\nu; V_{k\bar{r}}^{\lambda}, x_\nu | P_{k-\bar{r}-s}, X_s - x_\nu]|. \end{aligned} \tag{64}$$

Die letzte Summe ist nach unserer Annahme über $T_{\bar{r}+1} f$ kleiner als $c_{\bar{r}+1}$. Um von $\sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_{\bar{r}} f[U_{k\bar{r}}^{\lambda}; V_{k\bar{r}}^{\lambda} | P_k - P_{k\bar{r}}]|$ zu $\sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_{\bar{r}} f[U_{k\bar{r}}^{\lambda}; V_{k\bar{r}}^{\lambda} | X_k - X_{k\bar{r}}]|$ zu gelangen, müssen wir den durch (64) gekennzeichneten Schritt höchstens $(k - \bar{r})$-mal ausführen; daraus folgt, daß die letztere Summe kleiner als $c + (k - \bar{r})\, c_{\bar{r}+1}$ ist, also, weil die Gitterzerlegung beliebig war, auch

$$|T_{\bar{r}} f[A_{k\bar{r}}; B_{k\bar{r}} | X_k - X_{k\bar{r}}]| \leqq c + (k - \bar{r})\, c_{\bar{r}+1}.$$

Mit dieser Rekursionsformel ist Satz 25 bewiesen.

Nach dem eben bewiesenen Satze ist insbesondere jede vollständig monotone Funktion auch von beschränkter Gesamtvariation. Haben wir umgekehrt eine Funktion $f(X_k)$ von beschränkter Gesamtvariation, so betrachten wir im vollständig positiv orientierten Definitionsintervall $[A_k; B_k]^+$ die Funktion

$$\bar{f}(X_k) = f(A_k) + \sum_{r=1}^{k} T_r f[A_{kr}; X_{kr} | A_k - A_{kr}]^+. \tag{65}$$

Nun sei X_{ks} ein fester Teilkomplex von X_k, dann erhalten wir den Wert von $\Delta_s \bar{f}[U_{ks}; V_{ks} | A_k - A_{ks}]^+$ nach I (20), indem wir diese Δ_s-Funktion für alle Summanden $\bar{f}_{kr}(X_k) = T_r f[A_{kr}; X_{kr} | A_k - A_{kr}]$ einzeln bilden und dann summieren. Wir unterscheiden dabei drei Fälle:

1. X_{ks} enthält wenigstens ein Element von $X_k - X_{kr}$. Weil $\bar{f}_{kr}$ nach $X_k - X_{kr}$ konstant ist, erhalten wir in diesem Falle $\Delta_s \bar{f}_{kr}[U_{ks}; V_{ks} | A_k - A_{ks}]^+ = 0$.

2. X_{ks} ist mit $s < r$ ein Teilkomplex von X_{kr}. In diesem Falle erhalten wir wegen I (7) stets $\bar{f}_{kr}(X_{ks}, A_k - A_{ks}) = 0$, was wieder zu $\Delta_s \bar{f}_{kr}[U_{ks}; V_{ks} | A_k - A_{ks}]^+ = 0$ führt.

3. X_{ks} ist identisch mit X_{kr}. Dann erhalten wir, indem wir noch s durch r ersetzen, nach I, Satz 10 die Gleichung

$$\Delta_r \bar{f}_{kr}[U_{kr};\, V_{kr} \mid A_k - A_{kr}]^+ = T_r f[U_{kr};\, V_{kr} \mid A_k - A_{kr}]^+ .$$

Die Ausführung der geplanten Summation ergibt also, wenn wir noch (38) hinzunehmen:

$$(66)\quad \Delta_r \bar{f}[U_{kr};\, V_{kr} \mid A_k - A_{kr}]^+ = T_r f[U_{kr};\, V_{kr} \mid A_k - A_{kr}]^+ \geqq |\Delta_r f[U_{kr};\, V_{kr} \mid A_k - A_{kr}]^+| .$$

Nach (66) erfüllen die Funktionen $f_1 = \frac{1}{2}\bar{f} + \frac{1}{2}f$ und $f_2 = \frac{1}{2}\bar{f} - \frac{1}{2}f$ die Voraussetzungen des Satzes 24, sind also in $[A_k; B_k]$ vollständig positiv monoton. Weil aber $f = f_1 - f_2$ ist, haben wir damit den

Satz 26. *Eine Funktion, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter Gesamtvariation ist, läßt sich darstellen als Differenz zweier in $[A_k; B_k]$ vollständig positiv monotoner Funktionen.*

§ 7. Die Stetigkeit, die Integrierbarkeit und die Differenzierbarkeit der Funktionen von beschränkter Gesamtvariation.

In Erweiterung der Definition von $\delta X_k f(P_k)$ setzen wir jetzt

$$\overline{\lim_{X_{kr} \to P_{kr}}} |\Delta_r f[P_{kr};\, X_{kr} \mid P_k - P_{kr}]| = \delta X_{kr} f(P_k)$$

und bezeichnen diese Größe als die δX_{kr}-Schwankung von f in P_k. Nach I, Satz 4 ist f in P_k genau dann stetig, wenn $\delta X_{kr} f(P_k) = 0$ ist für alle $2^k - 1$ Komplexe X_{kr}. Wir beweisen

Satz 27. *Eine Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter Gesamtvariation ist, ist fast überall in $[A_k; B_k]$ stetig. Es existiert also das RX_k-Integral $RX_k f[A_k; B_k]$.*

Wir beweisen, daß für jeden Komplex X_{kr} die Menge $\mathfrak{M}(X_{kr})$ aller Punkte, in denen $\delta X_{kr} f > 0$ ist, das k-dimensionale Maß Null besitzt; wegen Satz 26 genügt es, diesen Nachweis für eine vollständige positiv monotone Funktion $f(X_k)$ zu erbringen. Es sei nun $[A_k; B_k]^+$ das Definitionsintervall von $f(X_k)$ in seiner vollständig positiven Orientierung.

1. Für $r = k$ ist $|\mathfrak{M}(X_{kr})| = 0$ wegen Satz 22.

2. Es sei $r < k$. Dann ist der Durchschnitt von $\mathfrak{M}(X_{kr})$ mit dem Intervall $[A_{kr}; B_{kr} \mid B_k - B_{kr}]^+$ nach Satz 22 abzählbar. Ist aber $\delta X_{kr} f(U_{kr}, B_k - B_{kr}) = 0$, so ist für jeden Wert $X_k - X_{kr}$ in $[A_k - A_{kr}; B_k - B_{kr}]^+$ auch $\delta X_{kr} f(U_{kr}, X_k - X_{kr}) = 0$, weil nach (59) stets $|\Delta_r f[U_{kr}; V_{kr} \mid B_k - B_{kr}]| \geqq |\Delta_r f[U_{kr}; V_{kr} \mid X_k - X_{kr}]|$ ist. Die Menge $\mathfrak{M}(X_{kr})$ besteht somit aus höchstens abzählbar vielen $(k-r)$-dimensionalen Intervallen, die auf $[A_{kr}; B_{kr} \mid B_k - B_{kr}]$ orthogonal beginnen und spätestens auf $[A_{kr}; B_{kr} \mid A_k - A_{kr}]$ endigen. Sie hat also das k-dimensionale Maß Null, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 28. *Eine Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter Gesamtvariation ist, besitzt fast überall in $[A_k; B_k]$ endliche obere und untere mehrdimensionale Ableitungen $\overline{DX}_{kr} f$ und $\underline{DX}_{kr} f$.*

Da es nach Satz 26 wieder genügt, den Satz für eine vollständig positiv monotone Funktion $f(X_k)$ zu beweisen, ist stets $0 \leqq \underline{DX}_{kr} f \leqq \overline{DX}_{kr} f$; wir zeigen also, daß die Menge $\mathfrak{N}(X_{kr})$, auf der $\overline{DX}_{kr} f = +\infty$ ist, das k-dimensionale Maß Null hat; $[A_k; B_k]^+$ sei die vollständig positive Orientierung des Definitionsintervalles.

1. Für $r = k$ ist $|\mathfrak{N}(X_{kr})| = 0$ wegen Satz 23.

2. Es sei $r < k$. Dann ist der Durchschnitt von $\mathfrak{N}(X_{kr})$ mit dem Intervall

$[A_{kr}; B_{kr} | B_k - B_{kr}]^+$ eine r-dimensionale Nullmenge, und aus (59) folgt hier $\overline{DX}_{kr} f(U_{kr}, B_k - B_{kr}) \geqq \overline{DX}_{kr} f(U_{kr}, X_k - X_{kr})$. Die Menge $\mathfrak{N}(X_{kr})$ besteht somit aus $(k-r)$-dimensionalen Intervallen, die auf einer r-dimensionalen Nullmenge des Intervalles $[A_{kr}; B_{kr} | B_k - B_{kr}]^+$ orthogonal beginnen und spätestens auf $[A_{kr}; B_{kr} | A_k - A_{kr}]^+$ endigen, hat also das k-dimensionale Maß Null.

Bemerkung. Wir hätten den Satz 27 auch unmittelbar aus Satz 28 mit Hilfe von I, Satz 7 folgern können. Aber die Tatsache, daß in Satz 27 die Ausnahmemenge $\mathfrak{M}(X_{kr})$ aus nur abzählbar vielen Intervallen besteht, während man das von der Menge $\mathfrak{N}(X_{kr})$ des Satzes 28 nicht sagen kann, läßt wohl die gesonderte Behandlung beider Sätze gerechtfertigt erscheinen.

Nicht ganz so einfach ist der Nachweis, daß $f(X_k)$ auch fast überall r-dimensional nach X_{kr} differenzierbar ist, wenn $r < k$ ist. Es folgt zwar aus Satz 23, daß die Menge $\mathfrak{N}'(X_{kr})$, in der $DX_{kr} f$ nicht existiert, auf jedem Schnitt $[A_{kr}; B_{kr} | X_r - X_{kr}]$ eine r-dimensionale Nullmenge bildet. Daraus darf man schließen, daß das innere k-dimensionale Maß $\underline{\mathfrak{N}}'(X_{kr})$ der Menge Null ist; offen bleibt aber die Frage, ob sie überhaupt meßbar ist[9]).

Wir können jedoch den Beweis des Satzes 23 dahin verändern, daß er für vollständig positiv monotone Funktionen auch über das k-dimensionale Maß von $\mathfrak{N}'(X_{kr})$ die gewünschte Aussage macht; nur werden wir die Intervallfolgen (50) und (55) durch Folgen mit anderen Eigenschaften ersetzen müssen.

Satz 29. *Eine Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter Gesamtvariation ist, besitzt fast überall in $[A_k; B_k]$ die Ableitung $DX_{kr} f$.*

Wegen Satz 26 genügt es, den Beweis für eine in $[A_k; B_k]^+$ vollständig positiv monotone Funktion $f(X_k)$ zu führen.

1. Für $r = k$ ist $|\mathfrak{N}'(X_{kr})| = 0$ wegen Satz 23.

2. Es seien im folgenden X_{kr} und X_{k-r} zwei komplementäre Komplexe mit $r < k$; die Teilkomplexe von X_{k-r} bezeichnen wir mit X_s $(1 \leqq s \leqq k-r)$. Wegen 1. dürfen wir annehmen, daß stets $|\mathfrak{N}'(X_{kr}, X_s)| = 0$ ist. Nach dieser Annahme und nach Satz 28 erhalten wir eine in den Maßen mit $\mathfrak{N}'(X_{kr})$ übereinstimmende Menge $\mathfrak{N}''(X_{kr})$, wenn wir aus ihr ihren Durchschnitt mit den Mengen $\mathfrak{N}'(X_{kr}, X_s)$ und die Menge $\mathfrak{N}(\overline{DX}_{kr} f = +\infty)$ entfernen. Sind nun $u < v$ zwei positive rationale Zahlen, so bilden alle Punkte von $\mathfrak{N}''(X_{kr})$, in denen $\underline{DX}_{kr} f < u < v < \overline{DX}_{kr} f$ ist, eine Teilmenge $\mathfrak{N}_1$ von $\mathfrak{N}''(X_{kr})$; wegen der Abzählbarkeit der rationalen Zahlenpaare haben wir wieder nur zu beweisen, daß $|\mathfrak{N}_1| = 0$ ist.

Es sei also $\overline{\mathfrak{N}_1} > 0$. Wir überdecken $\mathfrak{N}_1$ mit einer offenen Intervallmenge $\mathfrak{J}_1$, für die

$$|\mathfrak{J}_1| < \overline{\mathfrak{N}_1}(1 + \varepsilon) \tag{67}$$

gilt mit $0 < \varepsilon < 1$. Ist nun P_k ein Punkt von $\mathfrak{N}_1$ und $\underline{DX}_{kr} f(P_k) = u - d$, wobei $d > 0$ ist, so dürfen wir wegen unserer Annahme über die Existenz der Ableitungen $D(X_{kr}, X_s) f(P_k)$ und wegen der positiven Monotonie von f setzen $0 \leqq D(X_{kr}, X_s) f(P_k) < c$. Wir grenzen zur Konstruktion unserer Intervallfolge zunächst eine Umgebung

$$|X_k - P_k| < \delta \tag{68}$$

ab, die ganz in $\mathfrak{J}_1$ und in $[A_k; B_k]$ liegt und in der für $1 \leqq s \leqq k-r$

$$|\Delta_{r+s} f[P_{kr}, P_s; X_{kr}, X_s | P_{k-r} - P_s] < c\,|\Delta_{r+s}\psi_{r+s}[P_{kr}, P_s; X_{kr}, X_s]| = c\,|\Delta_r\psi_r[P_{kr}; X_{kr}]|\,|\Delta_s\psi_s[P_s; X_s]| \tag{69}$$

---

[9]) Vgl. zu diesem Problem: Sierpinski, Fund. Math. **1** (1920), S. 114.

gilt. Innerhalb (68) bestimmen wir eine Folge von r-dimensionalen Intervallen $[P_{kr}; U_{kr}^{\mu} \mid P_{k-r}]$ mit $U_{kr}^{\mu} \to P_{kr}$, für die

$$|\Delta_r f[P_{kr}; U_{kr}^{\mu} \mid P_{k-r}]| < (u - \tfrac{2}{3}d)\,|\Delta_r \psi_r[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}]| \tag{70}$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von ψ_s können wir einen Wert U_{k-r}^{μ} so finden, daß stets

$$c\,|\Delta_s \psi_s[P_s; X_s]| < \frac{1}{3}\frac{d}{2^{k-r}} \tag{71}$$

ist, wenn X_s im Intervall $[P_s; U_s^{\mu}]$ liegt, wobei wir noch $U_{k-r}^{\mu} \to P_{k-r}$ hinzufügen dürfen; für solche Werte von X_s geht (69) über in

$$|\Delta_{r+s} f[P_{kr}, P_s; U_{kr}^{\mu}, X_s \mid P_{k-r} - P_s]| < \frac{1}{3}\frac{d}{2^{k-r}}\,|\Delta_r \psi_r[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}]|. \tag{72}$$

Setzen wir noch $\Delta_r f\,[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}\, X_{k-r}] = g_{\mu}(X_{k-r})$, so erhalten wir aus I (18)

$$|g_{\mu}(X_{k-r}) - g_{\mu}(P_{k-r})| \leqq \sum_{s=1}^{k-r} |\Delta_s g_{\mu}[P_s; X_s \mid P_{k-r} - P_s]|,$$

was durch I (17) übergeht in

$$|g_{\mu}(X_{k-r}) - g_{\mu}(P_{k-r})| \leqq \sum_{s=1}^{k-r} |\Delta_{r+s} f[P_{kr}, P_s; U_{kr}^{\mu}, X_s \mid P_{k-r} - P_s]|. \tag{73}$$

Aus (72) und (73) erhalten wir

$$|g_{\mu}(X_{k-r}) - g_{\mu}(P_{k-r})| < \tfrac{1}{3}d\,|\Delta_r \psi_r[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}]|\,. \tag{74}$$

Wegen (70) ist $|g_{\mu}(P_{k-r})| < (u - \tfrac{2}{3}d)\,|\Delta_r \psi_r[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}]|$; im ganzen Intervall $[P_{k-r}; U_{k-r}^{\mu}]$ ist also nach (74)

$$|g_{\mu}(X_{k-r})| < (u - \tfrac{1}{3}d)\,|\Delta_r \psi_r[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}]| < u\,|\Delta_r \psi_r[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}]|\,. \tag{75}$$

Wegen der vollständigen Monotonie von f existiert das RX_{k-r}-Integral von $g_{\mu}(X_{k-r}) = \Delta_r; f[P_{kr}\, U_{kr}^{\mu} \mid X_{k-r}]$ über $[A_{k-r}; B_{k-r}]$, also auch das RX_{k-r}-Integral des absoluten Betrages dieser Funktion. Aus Satz 10 erhalten wir wegen (75) die Abschätzung

$$|RX_{k-r}|g_{\mu}|[P_{k-r}; U_{k-r}^{\mu}]| < u\,|\Delta_r \psi_r[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}]|\,|\Delta_{k-r}\psi_{k-r}[P_{k-r}; U_{k-r}^{\mu}]| = u\,|\Delta_k \psi_k[P_k; U_k^{\mu}]| \tag{76}$$

oder, indem wir für g_{μ} seine ursprüngliche Bedeutung einsetzen,

$$|RX_{k-r}(|\Delta_r f[P_{kr}; U_{kr}^{\mu}|X_{k-r}]|)\,[P_{k-r}; U_{k-r}^{\mu}]| < u\,|\Delta_k \psi_k[P_k; U_k^{\mu}]|\,. \tag{76a}$$

Damit haben wir jedem Punkt P_k von $\mathfrak{N}_1$ eine Intervallfolge $[P_k; U_k^{\mu}]$ mit $U_k^{\mu} \to P_k$ zugeordnet, für welche (76a) gilt.

Aus allen diesen Intervallfolgen greifen wir nach dem Satze von Vitali eine endliche Anzahl getrennt liegender Intervalle mit der Vereinigungsmenge $\mathfrak{J}_2$ heraus, für die

$$\overline{\mathfrak{N}_1\mathfrak{J}_2} > \overline{\mathfrak{N}_1}(1 - \varepsilon) \tag{77}$$

gilt; die Intervalle von $\mathfrak{J}_2$ seien $[P_k^{\lambda}; U_k^{\lambda}]$ mit $1 \leqq \lambda \leqq l$. Aus (67) erhalten wir

$$\sum_{\lambda=1}^{l} |\Delta_k \psi_k[P_k^{\lambda}; U_k^{\lambda}]| = |\mathfrak{J}_2| \leqq |\mathfrak{J}_1| < \overline{\mathfrak{N}_1}(1 + \varepsilon). \tag{78}$$

Aus (76a) und (78) folgt schließlich

$$\sum_{\lambda=1}^{l} |RX_{k-r}(|\Delta_r f[P_{kr}^{\lambda}; U_{kr}^{\lambda}|X_{k-r}]|)\,[P_{k-r}^{\lambda}; U_{k-r}^{\lambda}]| < u\,\overline{\mathfrak{N}_1}\,(1 + \varepsilon). \tag{79}$$

Nunmehr bezeichnen wir die Vereinigungsmenge der l offenen Intervalle $\langle P_k^{\lambda}; U_k^{\lambda}\rangle$ mit

$\mathfrak{J}_2'$ und setzen $\mathfrak{R}_1\mathfrak{J}_2' = \mathfrak{R}_2$; dann ist wegen $|\mathfrak{J}_2'| = |\mathfrak{J}_2|$ nach (77) auch

$$\overline{\mathfrak{R}_2} > \overline{\mathfrak{R}_1}(1-\varepsilon). \tag{80}$$

Für jeden Punkt Q_k von $\mathfrak{R}_2$ läßt sich in vollständiger Analogie zu dem Verfahren, das zu der durch (76a) gekennzeichneten Intervallfolge geführt hat, eine Intervallfolge $[Q_k^\mu; V_k^\mu]$ mit $V_k^\mu \to Q_k$ konstruieren, die ganz in $\mathfrak{J}_2'$ liegt und für die

$$|RX_{k-r}(|\Delta_r f[Q_{kr}; V_{kr}^\mu | X_{k-r}]|)\,[Q_{k-r}; V_{k-r}^\mu]| > v\,|\Delta_k \psi_k[Q_k; V_k^\mu]| \tag{81}$$

gilt. Der Satz von Vitali verschafft uns aus der Gesamtheit dieser Intervallfolgen eine endliche Anzahl getrennt liegender Intervalle mit der Vereinigungsmenge $\mathfrak{J}_3$, für die

$$|\mathfrak{J}_3| \geqq \overline{\mathfrak{R}_2\mathfrak{J}_3} > \overline{\mathfrak{R}_2}(1-\varepsilon) \tag{82}$$

gilt. Die Intervalle von $\mathfrak{J}_3$ seien $[Q_k^\nu; V_k^\nu]$ mit $1 \leqq \nu \leqq n$; aus (80), (81) und (82) folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} |RX_{k-r}(|\Delta_r f[Q_{kr}^\nu; V_{kr}^\nu | X_{k-r}]|)\,[Q_{k-r}^\nu; V_{k-r}^\nu]| > v\,\overline{\mathfrak{R}_1}(1-2\varepsilon). \tag{83}$$

Wählen wir unsere Zahl $\varepsilon > 0$ so klein, daß $u(1+\varepsilon) < v(1-2\varepsilon)$ wird, so erhalten wir aus (79) und (83)

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} |RX_{k-r}(|\Delta_r f[Q_{kr}^\nu; V_{kr}^\nu | X_{k-r}]|)\,[Q_{k-r}^\nu; V_{k-r}^\nu]| \\ &> \sum_{\lambda=1}^{l} |RX_{k-r}(|\Delta_r f[P_{kr}^\lambda; U_{kr}^\lambda | X_{k-r}]|)\,[P_{k-r}^\lambda; U_{k-r}^\lambda]|. \end{aligned} \tag{84}$$

Zu dieser Beziehung (84) werden wir in Widerspruch geraten, indem wir nachweisen, daß die links stehende Integralsumme nicht größer als die rechts stehende sein kann. Alle Integrationsintervalle der linken Seite liegen getrennt in den Integrationsintervallen der rechten Seite; die in $[P_{k-r}^\lambda; U_{k-r}^\lambda]$ liegenden bezeichnen wir mit $[Q_{k-r}^{\nu_\lambda}; V_{k-r}^{\nu_\lambda}]$, wobei $1 \leqq \nu_\lambda \leqq n_\lambda$ sei. Wegen des nirgends negativen Integranden erhalten wir

$$\begin{aligned} &|RX_{k-r}(|\Delta_r f[P_{kr}^\lambda; U_{kr}^\lambda | X_{k-r}]|)\,[P_{k-r}^\lambda; U_{k-r}^\lambda]| \\ &\geqq \sum_{\nu_\lambda=1}^{n_\lambda} |RX_{k-r}(|\Delta_r f[P_{kr}^\lambda; U_{kr}^\lambda | X_{k-r}]|)\,[Q_{k-r}^{\nu_\lambda}; V_{k-r}^{\nu_\lambda}]|; \end{aligned} \tag{85}$$

weil $[Q_{kr}^{\nu_\lambda}; V_{kr}^{\nu_\lambda}]$ ein Teilintervall von $[P_{kr}^\lambda; U_{kr}^\lambda]$ und f vollständig monoton ist, können wir (38a) anwenden und erhalten

$$|\Delta_r f[P_{kr}^\lambda; U_{kr}^\lambda | X_{k-r}]| \geqq |\Delta_r f[Q_{kr}^{\nu_\lambda}; V_{kr}^{\nu_\lambda} | X_{k-r}]|, \tag{86}$$

woraus sich

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu_\lambda=1}^{n_\lambda} |RX_{k-r}(|\Delta_r f[P_{kr}^\lambda; U_{kr}^\lambda | X_{k-r}]|)\,[Q_{k-r}^{\nu_\lambda}; V_{k-r}^{\nu_\lambda}]| \\ &\geqq \sum_{\nu_\lambda=1}^{n_\lambda} |RX_{k-r}(|\Delta_r f[Q_{kr}^{\nu_\lambda}; V_{kr}^{\nu_\lambda} | X_{k-r}]|)\,[Q_{k-r}^{\nu_\lambda}; V_{k-r}^{\nu_\lambda}]| \end{aligned} \tag{87}$$

ergibt. Aus (85) und (87) folgt

$$\begin{aligned} &|RX_{k-r}(|\Delta_r f[P_{kr}^\lambda; U_{kr}^\lambda | X_{k-r}]|)\,[P_{k-r}^\lambda; U_{k-r}^\lambda]| \\ &\geqq \sum_{\nu_\lambda=1}^{n_\lambda} |RX_{k-r}(|\Delta_r f[Q_{kr}^{\nu_\lambda}; V_{kr}^{\nu_\lambda} | X_{k-r}]|)\,[Q_{k-r}^{\nu_\lambda}; V_{k-r}^{\nu_\lambda}]|, \end{aligned} \tag{88}$$

woraus sich nun wegen $\sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\nu_\lambda=1}^{n_\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n}$ durch Summation über λ sofort

$$(88a)\qquad \sum_{\lambda=1}^{l} |RX_{k-r}(|\Delta_r f\,[P_{kr}^{\lambda};\, U_{kr}^{\lambda} \mid X_{k-r}]|)\,[P_{k-r}^{\lambda};\, U_{k-r}^{\lambda}]$$
$$\geqq \sum_{\nu=1}^{n} |RX_{k-r}(|\Delta_r f\,[Q_{kr}^{\nu};\, V_{kr}^{\nu} \mid X_{k-r}]|)\,[Q_{k-r}^{\nu};\, V_{k-r}^{\nu}]|$$

ergibt, im Widerspruch zu (84).

Unmittelbar aus Satz 29 folgt

Satz 30. *Eine Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter Gesamtvariation ist, ist fast überall in $[A_k; B_k]$ total k-dimensional differenzierbar.*

Wegen I, Satz 6 erhalten wir hierzu das

Korollar. *Eine Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ von beschränkter Gesamtvariation ist, besitzt fast überall in $[A_k; B_k]$ ein Stolzsches totales Differential.*

§ 8. Funktionen mit beschränkten Differenzenquotienten.

Ist $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ definiert, so existiert für jedes Intervall $[U_{kr}; V_{kr} \mid X_k - X_{kr}]$ innerhalb $[A_k; B_k]$ mit $1 \leqq r \leqq k$ die *skalare* Intervallfunktion

$$(89)\qquad QX_{kr}f[U_{kr}; V_{kr} \mid X_k - X_{kr}] = \frac{\Delta_r f[U_{kr}; V_{kr} \mid X_k - X_{kr}]}{\Delta_r \psi_r[U_{kr}; V_{kr}]},$$

die wir den Differenzenquotienten von f in diesem Intervall nennen. Gibt es eine Konstante $c > 0$, für die stets

$$(90)\qquad |QX_{kr}f[U_{kr}; V_{kr} \mid X_k - X_{kr}]| < c$$

gilt, so sagen wir, die Funktion f habe beschränkte Differenzenquotienten in $[A_k; B_k]$. Entsprechend den Sätzen 24 und 25 zeigen wir

Satz 31. *Eine Funktion $f(X_k)$ hat schon dann beschränkte Differenzenquotienten in $[A_k; B_k]$, wenn $QX_k f$ in $[A_k; B_k]$ und $QX_{kr}f$ für $r < k$ in dem durch einen festen Punkt P_k gehenden Schnitt $[A_{kr}; B_{kr} \mid P_k - P_{kr}]$ beschränkt ist.*

Es ist also stets

$$(91)\qquad |QX_{kr}f[U_{kr}; V_{kr} \mid P_k - P_{kr}]| < c \quad \text{für } 1 \leqq r \leqq k.$$

Zu beweisen ist, daß stets

$$(92)\qquad |QX_{kr}f[U_{kr}; V_{kr} \mid X_k - X_{kr}]| < c_r$$

ist.

1. Für $r = k$ ist (92) mit $c_r = c$ wegen (91) richtig.

2. Es sei $\bar{r} < k$ und (92) für $\bar{r} + 1$ richtig. Aus der Beziehung (60) erhalten wir durch Division mit $\Delta_{\bar{r}}\,\psi_{\bar{r}}[U_{k\bar{r}}; V_{k\bar{r}}]$, wobei wir noch I (21) berücksichtigen,

$$(93)\quad QX_{k\bar{r}}f[U_{k\bar{r}}; V_{k\bar{r}} \mid P_{k-\bar{r}-s}, X_s] = QX_{k\bar{r}}f[U_{k\bar{r}}; V_{k\bar{r}} \mid P_{k-\bar{r}-s}, p_\nu, X_s - x_\nu]$$
$$+ \Delta_1 \psi_1[p_\nu; x_\nu] QX_{k(\bar{r}+1)}f[U_{k\bar{r}}, p_\nu; V_{k\bar{r}}, x_\nu \mid P_{k-\bar{r}-s}, X_s - x_\nu].$$

Der letzte Summand ist nach unserer Annahme über $QX_{k(\bar{r}+1)}f$ absolut kleiner als $c_{\bar{r}+1} \mid \Delta_1 \psi_1[p_\nu; x_\nu] \mid \leqq c_{\bar{r}+1} \mid \Delta_1 \psi_1[a_\nu; b_\nu] \mid$. Um von $QX_{k\bar{r}}f[U_{k\bar{r}}; V_{k\bar{r}} \mid P_{k-\bar{r}}]$ zu $QX_{k\bar{r}}f[U_{k\bar{r}}; V_{k\bar{r}} \mid X_{k-\bar{r}}]$ zu gelangen, müssen wir den durch (93) gekennzeichneten Schritt höchstens $(k - \bar{r})$-mal ausführen; wir erhalten also, wenn wir noch (91) berücksichtigen,

$$(94)\qquad |QX_{k\bar{r}}f[U_{k\bar{r}}; V_{k\bar{r}} \mid X_{k-\bar{r}}]| < c + c_{\bar{r}+1} \sum_{X_\nu < X_{k-\bar{r}}}' |\Delta_1 \psi_1[a_\nu; b_\nu]|\,.$$

Mit $c_{\bar{r}} = c + c_{\bar{r}+1} \operatorname{Max} \sum_{X_\nu < X_{k-\bar{r}}}' |\Delta_1 \psi_1[a_\nu; b_\nu]|$ ist nun der Satz bewiesen.

Satz 32. *Jede Funktion $f(X_k)$, die in $[A_k; B_k]$ beschränkte Differenzenquotienten besitzt, ist in $[A_k; B_k]$ stetig und von beschränkter Gesamtvariation.*

1. Die Stetigkeit von f folgt aus I, Satz 7.

2. Ist $[U_{kr}^{\lambda}; V_{kr}^{\lambda} | P_k - P_{kr}]$ mit $1 \leqq \lambda \leqq l$ irgendeine Gitterzerlegung von $[A_{kr}; B_{kr} | P_k - P_{kr}]$, so haben wir für jedes Gitterintervall

$$|\Delta_r f[U_{kr}^{\lambda}; V_{kr}^{\lambda} | P_k - P_{kr}]| < c\,|\Delta_r \psi_r[U_{kr}^{\lambda}; V_{kr}^{\lambda}]|\,, \tag{95}$$

also für die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{l} |\Delta_r f[U_{kr}^{\lambda}; V_{kr}^{\lambda} | P_k - P_{kr}]| < c \sum_{\lambda=1}^{l} |\Delta_r \psi_r[U_{kr}^{\lambda}; V_{kr}^{\lambda}]| = c\,|\Delta_r \psi_r[A_{kr}; B_{kr}]|\,. \tag{96}$$

Damit ist Satz 32 bewiesen; alle Sätze der §§ 6 und 7 gelten somit für Funktionen mit beschränkten Differenzenquotienten.

Zu den RX_k-Integralfunktionen finden wir die Beziehung in

Satz 33. *Ist $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ beschränkt, so besitzen die beiden Integralfunktionen $\underline{F}(X_k) = \underline{RX}_k f[P_k; X_k]$ und $\overline{F}(X_k) = \overline{RX}_k f[P_k; X_k]$ in $[A_k; B_k]$ beschränkte Differenzenquotienten.*

Wir führen den Beweis für $\underline{F}$; derjenige für $\overline{F}$ verläuft genau so. Es sei $|f| < c$.

1. Da $\underline{RX}_k f$ die Forderungen des § 1 erfüllt, haben wir wegen Satz 1 und (9)

$$|\Delta_k \underline{F}[U_k; V_k]| = |\underline{RX}_k f[U_k; V_k]| < c\,|\Delta_k \psi_k[U_k; V_k]|\,, \tag{97}$$

was mit $|QX_k \underline{F}[U_k; V_k]| < c$ gleichbedeutend ist.

2. Für $r < k$ ist im Schnitt $[A_{kr}; B_{kr} | P_k - P_{kr}]$ nach (3) konstant $\underline{F} = 0$, also auch $QX_{kr}\underline{F}[U_{kr}; V_{kr} | P_k - P_{kr}] = 0$.

Weil nach 1. und 2. für $\underline{F}$ die Voraussetzungen des Satzes 31 erfüllt sind, ist damit Satz 33 bewiesen.

Wir fügen diesem Satze an, auf Grund des Satzes 30, das vielleicht überraschende

Korollar zu Satz 33. *Ist $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ beschränkt, so sind die beiden Integralfunktionen $\underline{RX}_k f[P_k; X_k]$ und $\overline{RX}_k f[P_k; X_k]$ fast überall in $[A_k; B_k]$ total k-dimensional differenzierbar.*

§ 9. Das Lebesgue-Integral.

Wir definieren auch das Lebesgue-Integral einer beschränkten Funktion $f(X_k)$ über ein Intervall $[A_k; B_k]$ vektoriell, indem wir in bekannter Weise zerlegen

$$f(X_k) = f_1(X_k) - f_2(X_k), \text{ wobei } \begin{cases} f_1 = f, \text{ wenn } f > 0; & f_1 = 0 \text{ überall sonst,} \\ f_2 = -f, \text{ wenn } f < 0; & f_2 = 0 \text{ überall sonst.} \end{cases}$$

Bilden die Ordinaten von f_1 in $[A_k; B_k]$ eine $(k+1)$-dimensional meßbare Menge $\mathfrak{M}_1$ und die Ordinaten von f_2 eine solche $\mathfrak{M}_2$, so nennen wir f in $[A_k; B_k]$ „LX_k-integrabel"; wir setzen

$$LX_k f[A_k; B_k]^e = (-1)^e\,|\mathfrak{M}_1| - (-1)^e\,|\mathfrak{M}_2|\,. \tag{98}$$

Diese Definitioner füllt die drei in § 1 an $\int X_k$ gestellten Forderungen; insbesondere ist also $LX_k f$ auch eine additive Intervallfunktion im Sinn von I, § 2.

Da wir den Beweis von Satz 33 ohne Abänderung auf eine LX_k-Integralfunktion übertragen können, haben wir sofort

Satz 34. *Es existiere $LX_k f[A_k; B_k]$. Dann hat jede LX_k-Integralfunktion $F(X_k) = LX_k f[P_k; X_k]$ von f in $[A_k; B_k]$ beschränkte Differenzenquotienten.*

Aus den Sätzen 32 und 30 erhalten wir hierzu das

Korollar zu Satz 34. *Eine in* $[A_k; B_k]$ *vorhandene* LX_k*-Integralfunktion ist in* $[A_k; B_k]$ *stetig und fast überall in* $[A_k; B_k]$ *total k-dimensional differenzierbar*[10]).

Zum Beweis des Umkehrsatzes haben wir noch zwei Festsetzungen nötig:

1. Ist $\mathfrak{M}$ eine meßbare Menge und f eine in $[A_k; B_k]$ LX_k-integrable Funktion, so definieren wir das Integral $LX_k f\mathfrak{M}[A_k; B_k]$ über den Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ und $[A_k; B_k]$, indem wir setzen

$f_1 = f$ auf $\mathfrak{M}[A_k; B_k]$; $f_1 = 0$ überall sonst, und $LX_k f\mathfrak{M}[A_k; B_k] = LX_k f_1[A_k; B_k]$.

2. Es sei $F(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ definiert. Dann bilden wir eine Funktion $\dot{D}X_k F$ in $[A_k; B_k]$, indem wir festsetzen

$\dot{D}X_k F = DX_k F$ überall, wo $DX_k F$ existiert; $\dot{D}X_k F = 0$ überall sonst.

Nunmehr beweisen wir

Satz 35. *Die stetige Funktion* $F(X_k)$ *habe in* $[A_k; B_k]$ *beschränkte k-dimensionale Differenzenquotienten* $QX_k F$. *Dann existiert* $LX_k(\dot{D}X_k F)[A_k; B_k]$ *und ist gleich* $\Delta_k F[A_k; B_k]$.

Bemerkung. Über die Differenzenquotienten $QX_{kr}F$ mit $r < k$ wird nichts vorausgesetzt; hieraus und aus Satz 34 ergibt sich, daß F keine LX_k-Integralfunktion zu sein braucht.

Der Mittelpunkt von $[A_k; B_k]$ sei P_k. Wegen I (5) genügt es dann, den Satz für eines der 2^k Teilintervalle $[A_{kr}, B_k - B_{kr}; P_k]$ zu beweisen; wir wählen dazu $[A_k; P_k]$ aus.

1. *Beweis der Existenz von* $LX_k(\dot{D}X_k F)\,[A_k; P_k]$.

Unter H_k^μ verstehen wir bei fester ganzer positiver Zahl μ den aus den k Konstanten $\dfrac{b_\nu - a_\nu}{2^\mu}$ bestehenden Komplex $(1 \leqq \nu \leqq k)$. Dann sind die Funktionen $g_\mu(X_k) = QX_k F[X_k; (X + H)_k^\mu]$ im ganzen Intervall $[A_k; P_k]$ stetig und gleichmäßig beschränkt.

Die Funktion F selbst ist von beschränkter X_k-Variation; sie besitzt daher nach Satz 23 auf einer mit $[A_k; P_k]$ maßgleichen Menge $\mathfrak{M}[A_k; P_k]$ die Ableitung $DX_k F$, und wir haben

$$\dot{D}X_k F = DX_k F \quad \text{auf} \quad \mathfrak{M}[A_k; P_k]; \tag{99a}$$

$$|\mathfrak{M}[A_k; P_k]| = |\Delta_k \psi_k[A_k; P_k]|. \tag{99b}$$

Wegen der Stetigkeit von $g_\mu(X_k)$ existiert $LX_k g_\mu[A_k; P_k]$, wegen (99b) also auch

$$LX_k g_\mu \mathfrak{M}[A_k; P_k] = LX_k g_\mu[A_k; P_k], \tag{100}$$

und weil alle Funktionen $g_\mu(X_k)$ gleichmäßig beschränkt sind, ist hiernach

$$\lim_{\mu\to\infty} LX_k\, g_\mu \mathfrak{M}[A_k; P_k] = LX_k(\lim_{\mu\to\infty} g_\mu)\,\mathfrak{M}[A_k; P_k] = LX_k(DX_k F)\,\mathfrak{M}[A_k; P_k]. \tag{101}$$

Wegen (99a) ist mit (101) die Existenz von $LX_k(\dot{D}X_k F)\,\mathfrak{M}[A_k; P_k]$ nachgewiesen, aus der wegen (99b) auch die Existenz von $LX_k(\dot{D}X_k F)[A_k; P_k]$ folgt, und zwar ist

$$LX_k(\dot{D}X_k F)[A_k; P_k] = \lim_{\mu\to\infty} LX_k g_\mu \mathfrak{M}[A_k; P_k] = \lim_{\mu\to\infty} LX_k g_\mu[A_k; P_k]. \tag{102}$$

2. *Beweis der Gleichung* $LX_k(\dot{D}X_k F)[A_k; P_k] = \Delta_k F[A_k; P_k]$.

---

[10]) Bisher war bekannt, daß fast überall die k-dimensionale Differenzierbarkeit nach dem Komplex X_k vorliegt. Vgl. hierzu etwa Saks, Théorie de l'intégrale (Warschau 1933), S. 232.

Wir leiten zuerst eine Hilfsformel ab. Wegen der Stetigkeit von F existiert auch $RX_kF[X_k; (X+H)_k^{\mu}]$; aus (30) erhalten wir daher

$$(103)\quad \lim_{\mu\to\infty}\frac{RX_kF[X_k; (X+H)_k^{\mu}]}{\Delta_k\psi_k[X_k; (X+H)_k^{\mu}]} = \lim_{\mu\to\infty}\frac{\Delta_k(DX^{-1}F)[X_k; (X+H)_k^{\mu}]}{\Delta_k\psi_k[X_k; (X+H)_k^{\mu}]} = F(X_k).$$

Um nun den angestrebten Beweis selbst zu führen, ersetzen wir in (102) das LX_k-Integral von g_μ durch das RX_k-Integral, was wegen der Stetigkeit von g_μ erlaubt ist, und erhalten

$$(104)\qquad LX_k(\dot{D}X_kF)[A_k; P_k] = \lim_{\mu\to\infty} RX_kg_\mu[A_k; P_k].$$

Bei festgehaltener Zahl μ ist $\Delta_k\psi_k[X_k; (X+H)_k^{\mu}] = \Delta_k\psi_k[0_k; H_k^{\mu}]$ eine Konstante; wir dürfen daher umformen zu

$$(105)\quad LX_k(\dot{D}X_kF)[A_k; P_k] = \lim_{\mu\to\infty}\frac{RX_k(\Delta_kF[X_k; (X+H)_k^{\mu}])[A_k; P_k]}{\Delta_k\psi_k[X_k; (X+H)_k^{\mu}]},$$

was nach (6) übergeht in

$$(106)\quad LX_k(\dot{D}X_kF)[A_k; P_k] = \lim_{\mu\to\infty}\frac{\Delta_k(RX_kF[X_k; (X+H)_k^{\mu}])[A_k; P_k]}{\Delta_k\psi_k[X_k; (X+H)_k^{\mu}]},$$

$$= \Delta_k\left(\lim_{\mu\to\infty}\frac{RX_kF[X_k; (X+H)_k^{\mu}]}{\Delta_k\psi_k[X_k; (X+H)_k^{\mu}]}\right)[A_k; P_k]$$

und nach (103) endlich in $LX_k(\dot{D}X_kF)\,[A_k; P_k] = \Delta_kF[A_k; P_k]$.

Hieraus folgt ganz leicht

Satz 36 (Umkehrsatz). *In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k) = DX_kF$ vorhanden und beschränkt. Dann existiert das Integral $LX_kf[A_k; B_k]$ und ist gleich $\Delta_kF[A_k; B_k]$.*

Es sei $|f| < c$ und $[U_k; V_k]$ ein Teilintervall von $[A_k; B_k]$. Nach I, Satz 14a ist dann $|\Delta_kF\,[U_k; V_k]| < c\,|\Delta_k\psi_k[U_k; V_k]|$; die Funktion F erfüllt demnach die Voraussetzungen des Satzes 35. Damit ist aber alles bewiesen.

§ 10. Vollständige mehrdimensionale L-Integralfunktionen.

Bekanntlich [11]) folgt aus der Existenz von $LX_kf[A_k; B_k]$ die Existenz von $LX_{kr}f[A_{kr}; B_{kr}|X_k - X_{kr}]$ fast überall in $[A_k - A_{kr}; B_k - B_{kr}]$; die Gesamtheit aller Intervalle $[A_{kr}; B_{kr}|X_k - X_{kr}]$, über die das Integral $LX_{kr}f$ existiert, bildet daher eine mit dem Intervall $[A_k; B_k]$ maßgleiche Menge $\mathfrak{M}_{kr}[A_k; B_k]$. Der Durchschnitt $\mathfrak{M}[A_k; B_k]$ der $2^k - 1$ Mengen $\mathfrak{M}_{kr}[A_k; B_k]$ ist ebenfalls mit $[A_k; B_k]$ maßgleich; jeder Punkt P_k von $\mathfrak{M}[A_k; B_k]$ hat die Eigenschaft, daß für ihn alle $2^k - 1$ Integrale $LX_{kr}f[A_{kr}; B_{kr}|P_k - P_{kr}]$ existieren. Wir können daher sagen, daß f von P_k aus *vollständig k-dimensional L-integrabel* über $[A_k; B_k]$ sei. Daraus ergibt sich

Satz 37. *Existiert $LX_kf[A_k; B_k]$, so ist f von einer mit dem Intervall $[A_k; B_k]$ maßgleichen Punktmenge $\mathfrak{M}[A_k; B_k]$ aus vollständig k-dimensional L-integrabel über $[A_k; B_k]$.*

Nun sei P_k ein Punkt von $\mathfrak{M}[A_k; B_k]$, dann bilden wir die Funktion

$$(107)\qquad F(X_k) = \sum_{r=1}^{k} LX_{kr}f[P_{kr}; X_{kr}|P_k - P_{kr}]$$

und nennen F die *von P_k aus in $[A_k; B_k]$ gebildete vollständige k-dimensionale L-Integralfunktion von f.* Eine solche Funktion besitzt in $[A_k; B_k]$ beschränkte Differenzen-

[11]) Vgl. etwa Carathéodory, Vorl. über reelle Funktionen (Leipzig 1918), S. 632, Satz 4.

quotienten, weil nach Satz 34 jeder ihrer $2^k - 1$ Summanden diese Eigenschaft hat; wir wollen jetzt die Umkehrung beweisen, nämlich den

Satz 38. *Besitzt $F(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ beschränkte Differenzenquotienten und ist P_k ein Punkt von $[A_k; B_k]$, so ist $F(X_k) - F(P_k)$ die von P_k aus gebildete vollständige k-dimensionale L-Integralfunktion einer in $[A_k; B_k]$ definierten Funktion $f(X_k)$.*

Zum Beweise bilden wir die Funktion $f(X_k)$, indem wir $f(P_k)$ beliebig annehmen und in allen anderen Punkten von $[A_k; B_k]$ die für $1 \leqq r \leqq k$ eindeutige Festsetzung treffen

$$(108)\quad f(X^*_{kr}, P_k - P^*_{kr}) = \dot{D}X^*_{kr}F(X^*_{kr}, P_k - P^*_{kr}), \text{ wenn } |\Delta_r\psi_r[P^*_{kr}; X^*_{kr}]| > 0.$$

Damit ist f in $[A^*_{kr}; B^*_{kr} | P_k - P^*_{kr}]$ eine mit $\dot{D}X^*_{kr}F$ äquivalente Funktion von X^*_{kr}; aus Satz 35 erhält man daher

$$(109)\qquad LX^*_{kr}f[P^*_{kr}; X^*_{kr} | P_k - P^*_{kr}] = \Delta_k F[P^*_{kr}; X^*_{kr} | P_k - P^*_{kr}],$$

woraus unter Benutzung von I (18) sich sofort

$$(110)\quad \sum_{r=1}^{k} LX_{kr}f[P_{kr}; X_{kr} | P_k - P_{kr}] = \sum_{r=1}^{k} \Delta_r F[P_{kr}; X_{kr} | P_k - P_{kr}] = F(X_k) - F(P_k)$$

ergibt, womit der Satz bewiesen ist.

Unmittelbar aus diesem Satz erhalten wir das

Korollar zu Satz 38. *Eine Funktion $F(X_k)$ ist genau dann eine vollständige k-dimensionale L-Integralfunktion in $[A_k; B_k]$, wenn sie in $[A_k; B_k]$ beschränkte Differenzenquotienten und wenigstens eine Nullstelle besitzt.*

§ 11. Die L-Integrabilität von sukzessiven Ableitungen und die Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge.

Der Komplex X_k bestehe aus den Teilkomplexen $X_{kr_1}, X_{kr_2}, \ldots, X_{kr_n}$. Überall in $[A_k; B_k]$ sei $F(X_k)$ definiert, sowie die Ableitung $DX_{kr_n} \ldots DX_{kr_2} DX_{kr_1} F = f$ vorhanden und beschränkt (was die Existenz der $n - 1$ vorhergehenden Ableitungen in sich schließt). Aus Satz 36 und I (16) läßt sich dann leicht folgern, daß das sukzessive Integral

$$LX_{kr_1} \ldots (LX_{kr_{n-1}} (LX_{kr_n} f[A_{kr_n}; B_{kr_n} | X_k - X_{kr_n}])$$
$$[A_{kr_{n-1}}; B_{kr_{n-1}} | X_k - X_{kr_n} - X_{kr_{n-1}}]) \ldots [A_{kr_1}; B_{kr_1}]$$

existiert und gleich $\Delta_k F[A_k; B_k]$ ist. Hieraus darf man bekanntlich[12]) nicht ohne weiteres die Existenz von $LX_k f[A_k; B_k]$ folgern. Daß aber für unsere Ableitung f gerade dieses letztere Integral existiert, bildet den Inhalt von

Satz 39. *In $[A_k; B_k]$ sei $F(X_k)$ definiert und stetig. Für eine Zerlegung $\sum_{\nu=1}^{n} X_{kr_\nu} = X_k$ des Komplexes X_k sei $f = DX_{kr_n} \ldots DX_{kr_2} DX_{kr_1} F$ in $[A_k; B_k]$ vorhanden und beschränkt. Dann existiert fast überall in $[A_k; B_k]$ auch $DX_k F = f$; außerdem ist das Integral $LX_k f[A_k; B_k]$ vorhanden und gleich $\Delta_k F(A_k; B_k]$.*

Zum Beweise sei $[U_k; V_k]$ ein Teilintervall von $[A_k; B_k]$ und $|f| < c$. Analog I (72) erhalten wir durch n-fache Anwendung des Mittelwertsatzes I, Satz 14 a

$$(111)\quad |\Delta_k F[U_k; V_k]| = |\Delta_k \psi_k[U_k; V_k]|\,|f(P_k)| < c\,|\Delta_k \psi_k[U_k; V_k]|.$$

---

[12]) S. a. O. [11]), S. 634.

Wir können demnach auf F die Sätze 23 und 35 anwenden. Aus ihnen ergibt sich auf einer mit $[A_k; B_k]$ maßgleichen Menge $\mathfrak{M}[A_k; B_k]$ die Existenz von DX_kF, ferner die Existenz des Integrales $LX_k(\dot{D}X_kF)\,[A_k; B_k]$ und die Gleichung

$$LX_k(\dot{D}X_kF)[A_k; B_k] = \Delta_kF[A_k; B_k].$$

Auf $\mathfrak{M}[A_k; B_k]$ gilt nach Folgerung 2 aus I, Satz 21 aber auch $DX_kF = f$, so daß $\dot{D}X_kF$ und f in $[A_k; B_k]$ äquivalente Funktionen sind. Damit ist alles bewiesen.

Aus diesem Satz und I, Satz 21 folgt nun unmittelbar

Satz 40. *In $[A_k; B_k]$ sei $F(X_k)$ stetig. Für zwei Zerlegungen $\sum_{\nu=1}^{n} X_{kr_\nu} = X_k$ und $\sum_{\mu=1}^{m} X_{ks_\mu} = X_k$ von X_k existiere überall $f(X_k) = DX_{kr_n} \ldots DX_{kr_2}\, DX_{kr_1}\, F(X_k)$ und $g(X_k) = DX_{ks_{m-1}} \ldots DX_{ks_2}\, DX_{ks_1}\, F(X_k)$; außerdem sei f in $[A_k; B_k]$ beschränkt. Dann ist fast überall in $[A_k; B_k]$ auch $DX_{ks_m}\, g$ vorhanden und gleich f.*

Wir wollen diesen Satz für den klassischen Fall von zwei Veränderlichen spezialisieren:

Satz 40a. *In $[A_2; B_2]$ existiere F, Dx_1F, Dx_2F und $Dx_2\,Dx_1F$; außerdem sei F stetig und Dx_2Dx_1F beschränkt. Dann ist fast überall in $[A_2; B_2]$ auch Dx_1Dx_2F vorhanden und gleich Dx_2Dx_1F.*

Eingegangen 17. Oktober 1934.

Berichtigung zu der Arbeit

Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen

ds. Journ. Band 170, S. 197—217.

Von *Karl Bögel* in Halberstadt.

Auf Seite 202, Zeile 23 muß es heißen $\sum_{r=0}^{k}$ statt $\sum_{r=1}^{k}$; ebenso auf Seite 207 in (38) $\sum_{r=0}^{k-1}$ statt $\sum_{r=1}^{k-1}$.

Die Diskriminante einer normalen einfachen Algebra.

Von *Hans Reichardt* in Frankfurt a. M.

I. [1]) Es sei A eine normale einfache Algebra vom Grad N über einem algebraischen Zahlkörper Ω endlichen Grades. $s(a)$ bezeichne die zu einer absolut-irreduziblen Darstellung von A gehörige Spur von a. Als Diskriminante von N^2 beliebigen Elementen $a_1, \ldots, a_{N^2}$ aus A bezeichne ich die N^2-reihige Determinante

$$\Delta(a_1, \ldots, a_{N^2}) = |s(a_\varkappa a_\lambda)|.$$

Ist dann

$$a_i' = \sum_{k=1}^{N^2} \alpha_{ik} a_k \qquad (i = 1, \ldots, N^2;\ \alpha_{ik} \text{ aus } \Omega),$$

so wird

$$\Delta(a_1', \ldots, a_{N^2}') = |\alpha_{ik}|^2 \Delta(a_1, \ldots, a_{N^2}).$$

Dann und nur dann ist $\Delta(a_1', \ldots, a_{N^2}') \neq 0$, wenn $a_1', \ldots, a_{N^2}'$ über Ω linear unabhängig sind. Bilden nämlich $a_1, \ldots, a_{N^2}$ eine Ω-Basis von A und sind $a_1', \ldots, a_{N^2}'$ linear abhängig, so ist $|\alpha_{ik}| = 0$. Sind $a_1', \ldots, a_{N^2}'$ dagegen linear unabhängig, so bleiben sie es auch, wenn ich A als Algebra über einem Zerfällungskörper Z von A betrachte, d. h. wenn ich das direkte Produkt $A_\mathsf{Z} = A \times \mathsf{Z}$ bilde. Dann hängen $a_1', \ldots, a_{N^2}'$ mit den üblichen Matrizeneinheiten e_{ik} $(i, k = 1, \ldots, N)$ von A_Z durch eine Substitution mit von Null verschiedener Determinante zusammen, so daß nur noch $|s(e_{\varkappa\lambda}\, e_{\mu\nu})|_{\varkappa,\lambda;\mu,\nu} \neq 0$ zu zeigen ist. Nun ist aber

$$e_{\varkappa\lambda}\, e_{\mu\nu} = \begin{cases} e_{\varkappa\nu} & \text{für} \quad \lambda = \mu, \\ 0 & \text{,,} \quad \lambda \neq \mu, \end{cases}$$

also

$$s(e_{\varkappa\lambda}\, e_{\mu\nu}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda = \mu,\ \varkappa = \nu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher wird $|s(e_{\varkappa\lambda}\, e_{\mu\nu})| = \pm 1$.

Es sei nun $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung von A. Sind dann $a_1, \ldots, a_{N^2}$ beliebige Zahlen aus $\mathfrak{o}$, so ist $\Delta(a_1, \ldots, a_{N^2})$ eine ganze Zahl aus Ω. Lasse ich nun $a_1, \ldots, a_{N^2}$ unabhängig voneinander alle Elemente von $\mathfrak{o}$ durchlaufen, so werden die $\Delta(a_1, \ldots, a_{N^2})$ als größten gemeinsamen Teiler ein ganzes von Null verschiedenes Ideal aus Ω haben, das ich als die *Diskriminante* $\mathfrak{d}$ *von* $\mathfrak{o}$ definiere.

$\mathfrak{d}$ soll nun berechnet werden.

---

[1]) Zu I und II vgl. K. Shoda, Diskriminantensatz für normale einfache hyperkomplexe Systeme, Proceedings of the Imperial Academy **10** (1934), S. 315—321. — Die Shodasche Diskriminante ist aber dort nicht richtig berechnet, und auch nur unter der Annahme, daß für A über Ω eine Minimalbasis existiert. Bei geeigneter Definition ist sie in Wirklichkeit die N^2-te Potenz der hier definierten Diskriminante.

$\mathfrak{p}$ sei Primideal aus Ω, $\Omega_\mathfrak{p}$ und $A_\mathfrak{p}$ die zugehörigen $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungen [2]), n der $\mathfrak{p}$-Index von A und $N = nk$. $A_\mathfrak{p}$ ist dann volle k-reihige Matrixalgebra über der Divisionsalgebra $\Omega_\mathfrak{p}(\pi, \omega)$ vom Grad n über $\Omega_\mathfrak{p}$. Dabei ist $\pi^n = p$ Primelement zu $\mathfrak{p}$ in $\Omega_\mathfrak{p}$, $\Omega_\mathfrak{p}(\omega)$ unverzweigter zyklischer Körper vom Grad n über $\Omega_\mathfrak{p}$, und die konjugierten zu ω über $\Omega_\mathfrak{p}$ sind $\omega^{(\nu)} = \pi^{-\nu}\,\omega\pi^\nu (\nu = 0, \ldots, n-1)$. Die aus $\mathfrak{o}$ entstehende Maximalordnung $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$ besitzt eine Minimalbasis der Form

$$\omega^a \pi^b e_{\varkappa\lambda} (a, b = 0, \ldots, n-1;\ \pi, \lambda = 1, \ldots, k;\ e_{\varkappa\lambda} \text{ Matrizeneinheiten}).$$

Definiere ich nun die Diskriminante $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$ entsprechend wie $\mathfrak{d}$, so ist $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}$ offenbar gleich dem Ideal, das aus der Diskriminante dieser Minimalbasis erzeugt wird. Da $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ enthalten ist, ist $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}$ ein Teiler von $\mathfrak{d}(\mathfrak{p})$, dem Beitrag von $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{d}$. Andererseits kann aber auch keine höhere Potenz von $\mathfrak{p}$ als $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{d}$ aufgehen, da sich ja die Minimalbasis von $A_\mathfrak{p}$ beliebig genau durch Elemente aus $\mathfrak{o}$ approximieren läßt. Es ist also $\mathfrak{d}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{d}_\mathfrak{p}$.

Es ist also jetzt die N^2-reihige Determinante

$$|s(\omega^a \pi^b e_{\varkappa\lambda} \cdot \omega^c \pi^d e_{\mu\nu})|_{a,b,\varkappa,\lambda;\, c,d,\mu,\nu}$$

zu berechnen. Die zu $\omega^a \pi^b e_{\varkappa\lambda} \cdot \omega^c \pi^d e_{\mu\nu} = \omega^a \pi^b \omega^c \pi^d e_{\varkappa\lambda} e_{\mu\nu}$ gehörige Matrix aus einer absolut-irreduziblen Darstellung von $A_\mathfrak{p}$ ist das Kroneckersche Produkt aus der zu $\omega^a \pi^b \omega^c \pi^d$ gehörigen Matrix einer absolut-irreduziblen Darstellung von $\Omega_\mathfrak{p}(\pi, \omega)$ mit der zu $e_{\varkappa\lambda} e_{\mu\nu}$ gehörigen Matrix aus einer absolut-irreduziblen Darstellung der k-reihigen vollen Matrixalgebra über $\Omega_\mathfrak{p}$. Sind daher s_1 und s_2 die zu diesen beiden Darstellungen gehörigen Spuren, so wird

$$s(\omega^a \pi^b \omega^c \pi^d e_{\varkappa\lambda} e_{\mu\nu}) = s_1(\omega^a \pi^b \omega^c \pi^d)\, s_2(e_{\varkappa\lambda} e_{\mu\nu}) = \begin{cases} s_1(\omega^a \pi^b \omega^c \pi^d) & \text{für} \quad \lambda = \mu,\ \varkappa = \nu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt sofort, daß die obige Determinante gleich ist

$$|s_1(\omega^a \pi^b \cdot \omega^c \pi^d)|^{k^2}.$$

Eine absolut irreduzible Darstellung von $\Omega_\mathfrak{p}(\omega, \pi)$ ist nun durch folgende Zuordnung gegeben:

$$\omega \to \begin{pmatrix} \omega & & & \\ & \omega' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad \pi \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\omega^a \pi^b \to \begin{pmatrix} & & & & \omega^a & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \omega^{(n-b-1)a} \\ \omega^{(n-b)a} p & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \omega^{(n-1)a} p & & & & \end{pmatrix},$$

entsprechend für c, d.

Daraus folgt

$$s_1(\omega^a \pi^b\, \omega^c \pi^d) = \begin{cases} s_1(\omega^a\, \omega^c) & \text{für} \quad b = d = 0, \\ p\, s_1(\omega^a\, \omega^{(b)c}) & \text{für} \quad b + d = n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

---

[2]) Für alle nun benutzten $\mathfrak{p}$-adischen Dinge siehe H. Hasse, Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), S. 495—534.

und damit

$$|s_1(\omega^a\pi^b\cdot\omega^c\pi^d)|_{a,b;c,d}=\begin{vmatrix}(s_1(\omega^a\omega^c))_{a,c} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & (ps_1(\omega^a\omega'^c))_{a,c}\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ 0 & (ps_1(\omega^a\omega^{(n-1)c}))_{a,c} & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$=\pm p^{n(n-1)}\prod_{\nu=0}^{n-1}|s_1(\omega^a\omega^{(\nu)c})|_{a,c}.$$

Da die Determinante $|s_1(\omega^a\omega^{(\nu)c}|_{a,c}$ für jedes ν die gewöhnliche Körperdiskriminante von $\Omega_\mathfrak{p}(\omega)/\Omega_\mathfrak{p}$ erzeugt ($1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ bilden ja eine Minimalbasis für $\Omega_\mathfrak{p}(\omega)$) und da $\Omega_\mathfrak{p}(\omega)$ unverzweigt über $\Omega_\mathfrak{p}$ ist, ist sie Einheit für p, und es hat sich somit ergeben:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^{(n-1)nk^2}=\mathfrak{p}^{(n-1)kN}.$$

Für die Diskriminante $\mathfrak{d}$ von A folgt daraus wegen $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}=\mathfrak{d}(\mathfrak{p})$

$$\mathfrak{d}=\prod_\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{(n-1)kN}=\prod_\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)N^2},$$

wobei das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{p}$ von Ω zu erstrecken ist und n der jeweilige $\mathfrak{p}$-Index von A ist. $\mathfrak{d}$ ist also nicht von $\mathfrak{o}$ abhängig, sie ist eine Invariante von A.

II. In der Diskriminante steckt das ganze Zerlegungsgesetz der Primideale aus Ω in A; denn der $\mathfrak{p}$-Index, der ja die Art der Zerlegung von $\mathfrak{p}$ vollständig charakterisiert, läßt sich direkt aus $\mathfrak{d}$ ablesen. Speziell sind alle und nur die Primideale aus Ω in A verzweigt, die in der Diskriminante aufgehen.

Der Zusammenhang von $\mathfrak{d}$ mit der Differente $\mathfrak{D}$ von A über Ω ist höchst einfach, nämlich:

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{D}^{N^2}$$

oder auch

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{N}(\mathfrak{D}).$$

Dabei ist $\mathfrak{N}$ die Norm aus der regulären Darstellung von A über Ω. In der Tat: Es ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}^n$ die Primidealzerlegung von $\mathfrak{p}$ in A, und es ist $\mathfrak{D}=\prod_\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{n-1}$, also

$$\mathfrak{D}^{N^2}=\prod_\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{(n-1)N^2}=\prod_\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{(n-1)kN}=\mathfrak{d},$$

und weiter ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})=\mathfrak{p}^{\frac{N^2}{n}}=\mathfrak{p}^{kN}$, also

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{D})=\prod_\mathfrak{P}\mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{n-1}=\prod_\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{(n-1)kN}=\mathfrak{d}.$$

Nimmt man in die Diskriminante noch die verzweigten unendlichen Primstellen auf (wenn überhaupt vorhanden), so läßt sich der Satz, daß eine normale einfache Algebra dann und nur dann zerfällt, wenn sie an jeder Stelle zerfällt, auch so aussprechen: Unter den normalen einfachen Algebren sind die vollen Matrixalgebren die einzigen mit der Diskriminante 1.

Stellt man A als verschränktes Produkt eines galoisschen Teilkörpers Z von A mit seiner galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ dar:

$$A=\sum_{u<\mathfrak{G}}z_u\mathsf{Z},\qquad z_u^{-1}\alpha z_u=\alpha^u,\qquad z_u z_v=z_{uv}c_{u,v}\quad(u, v \text{ Elemente aus } \mathfrak{G}),$$

so bilden, wenn man das Faktorensystem $c_{u,v}$ aus der Hauptordnung von Z wählt, die Elemente von A, bei denen die Koeffizienten der z_u ganze Zahlen aus Z sind, eine Ordnung. Die Diskriminante $\Delta(z_u\alpha_i)$ ist daher, wenn die α_i ganze Zahlen aus Z sind,

teilbar durch $\mathfrak{d}$. Eine kurze Rechnung ergibt nun

$$\Delta(z_u \alpha_i) = \pm \delta^N \prod_{u,v} c_{u,v}^2 ,$$

wobei δ die gewöhnliche Diskriminante der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ für Z/Ω bezeichnet. Der größte gemeinsame Teiler dieser δ ist nun die Diskriminante $\mathfrak{d}_{\mathsf{Z}/\Omega}$ von Z über Ω. Ist daher speziell Z ein regulärer galoisscher Teilkörper von A, d. h. sind die $c_{u,v}$ Einheitswurzeln, so erhält man $\mathfrak{d} | \mathfrak{d}_{\mathsf{Z}/\Omega}^N$.

III. Die Diskriminante $\mathfrak{d}$ von A war bisher als größter gemeinsamer Teiler von unendlich vielen Zahlen definiert. Ich will zum Schluß zeigen, wie man $\mathfrak{d}$ auch als größten gemeinsamen Teiler von endlich vielen Zahlen darstellen kann.

Λ sei ein Teilkörper von Ω, in bezug auf den $\mathfrak{o}$ eine Minimalbasis $a_1, \ldots, a_M$ (M der Rang von A über Λ) besitzt. Ein solcher Körper existiert stets, z. B. der Körper der rationalen Zahlen. Zweckmäßigerweise wird man Λ möglichst groß wählen, damit M recht klein wird. Es ist dann $\mathfrak{d}$ der größte gemeinsame Teiler aller N^2-reihigen Unterdeterminanten der M-reihigen Matrix $(s(a_\varkappa a_\lambda))$.

Beweis: Sind $b_1, \ldots, b_{N^2}$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{o}$, so ist

$$b_i = \sum_{k=1}^{M} \alpha_{ik} a_k \qquad (i = 1, \ldots, N^2),$$

und es wird

$$\Delta(b_1, \ldots, b_{N^2}) = \left| \sum_{\mu,\nu=1}^{M} \alpha_{\varkappa\mu} s(a_\mu a_\nu) \alpha_{\lambda\nu} \right|_{\varkappa,\lambda} .$$

Daraus folgt [3]), daß $\Delta(b_1, \ldots, b_{N^2})$ sich linear und ganzzahlig aus den N^2-reihigen Unterdeterminanten von $(s(a_\mu a_\nu))$ zusammensetzen läßt, weil die α_{ik} ja ganz sind. Ist also $\mathfrak{d}'$ der größte gemeinsame Teiler dieser Unterdeterminanten, so ist $\mathfrak{d}' | \mathfrak{d}$. Es ist also noch $\mathfrak{d} | \mathfrak{d}'$ zu zeigen. Dazu gehe ich wieder zu $A_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ Primideal aus Ω) über. In $A_\mathfrak{p}$ existiert eine Minimalbasis $c_1, \ldots, c_{N^2}$ von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ über $\Omega_\mathfrak{p}$. Ist dann

$$a_i = \sum_{k=1}^{N^2} \beta_{ik} c_k \qquad (i = 1, \ldots, M)$$

mit ganzen β_{ik} aus $\Omega_\mathfrak{p}$, so ist eine N^2-reihige Determinante

$$\begin{aligned} |s(a_{p_\varkappa} a_{q_\lambda})|_{\varkappa,\lambda} &= \left| \sum_{\mu,\nu=1}^{N^2} \beta_{p_\varkappa \mu} s(c_\mu c_\nu) \beta_{q_\lambda \nu} \right|_{\varkappa,\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, \ldots, N^2) \\ &= |\beta_{p_\varkappa \mu}|_{\varkappa,\mu} |s(c_\mu c_\nu)|_{\mu,\nu} |\beta_{q_\lambda \nu}|_{\lambda,\nu} , \end{aligned}$$

also ist $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}$ ein Teiler aller dieser Determinanten, also $\mathfrak{d}_\mathfrak{p} | \mathfrak{d}'$, und daraus folgt $\mathfrak{d} | \mathfrak{d}'$ wegen $\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{d}(\mathfrak{p})$, womit nunmehr die Richtigkeit der neuen Charakterisierung von $\mathfrak{d}$ nachgewiesen ist.

Es sei noch erwähnt, daß diese „reduzierte“ Diskriminante sich von der mit der Spur aus der regulären Darstellung definierten um den Faktor N^{N^2} unterscheidet.

[3]) Vgl. dazu etwa H. Hasse, Aufgabensammlung zur höheren Algebra **1** (1934), IV, § 19, Aufgabe 9.

Eingegangen 18. Oktober 1934.

Über harmonikale Abbildungen.

Von *Hermann Wolff* in Berlin.

Legt man durch die Ecken eines Dreiecks Geraden durch einen Punkt (*harmonischen Pol*) P, so schneiden die durch jede Ecke gelegten vierten harmonischen Strahlen die Gegenseiten in den Punkten einer Geraden H_P, der *Harmonikalen von* P. So ist z. B. die uneigentliche Gerade Harmonikale des Schwerpunktes und der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden harmonischer Pol zu der Geraden, auf der die Außenwinkelhalbierenden die Gegenseiten schneiden. — Das Grunddreieck wird gelegentlich auch als Grunddreiseit aufgefaßt werden.

Die Zuordnung zwischen Pol P und Harmonikale H_P ist keine Korrelation (geschweige denn eine involutorische wie die Polarität bei Kegelschnitten) und deshalb von einem gewissen Interesse. Sie ist eineindeutig, so daß wir gelegentlich statt P auch P_H schreiben, *jedoch mit folgenden Ausnahmen*:

Jede Gerade durch eine Ecke des Grunddreiecks hat diese zum harmonischen Pol, so daß diese Ecke jede hindurchgehende Gerade zur Harmonikalen hat.

Jeder Punkt auf einer Seite des Grunddreiecks hat diese zur Harmonikalen, so daß diese Seite jeden ihrer Punkte zum harmonischen Pol hat.

Diesen Ausnahmen Rechnung tragend legen wir unseren Betrachtungen ein Dreieck und einen *nicht auf seinem Rande liegenden* Punkt P zugrunde. Sind $p_1 : p_2 : p_3$ seine Koordinaten in bezug auf das Dreieck als Grunddreieck, so ist also

$$p_1 p_2 p_3 \neq 0,$$

und zugleich ist dann für die Linienkoordinaten $h_1 : h_2 : h_3$ seiner Harmonikalen H_P

$$h_1 h_2 h_3 \neq 0.$$

Diese Figur bestimmt weiterhin zwei Kegelschnitte, deren Zusammenhang mit den Harmonikalen z. T. von Moser [1]) dargestellt wurde. Seine Resultate, die als solche durch Fußnoten gekennzeichnet sind, sollen hier etwas einfacher entwickelt und ergänzt werden. Neu hinzu treten zwei von dieser Figur gleichfalls abhängige Kurven vierter Ordnung bzw. vierter Klasse.

Nach den für ausgeartete Fälle spezialisierten Sätzen von Pascal und Brianchon gilt nämlich:

Durch die Ecken des Grunddreiecks läßt sich ein Umkegelschnitt U_H legen, der in ihnen die eingangs genannten vierten harmonischen Strahlen berührt [2]).

Den Seiten des Grunddreiseits als Tangenten läßt sich ein Inkegelschnitt I_P ein- oder anbeschreiben, dessen Berührungspunkte die Fußpunkte der Ecktransversalen durch P sind [2]).

[1]) I. Moser, Zur Lehre von den Harmonicalen, Unterrichtsbl. für Math. u. Naturwissensch. **20** (1914), S. 135ff., sowie ebenda **26** (1920), S. 31ff. Die Arbeiten waren mir bei Abfassung der meinigen unbekannt.

[2]) H heiße auch die Pascalsche Gerade von U_H, P der Brianchonsche Punkt von I_P.

Die vier Gebilde P, H_P, U_P, I_P hängen also in der Weise zusammen, daß jedes von ihnen die drei anderen eindeutig bestimmt. Sie können daher gelegentlich auch z. B. als P_U, H_U, U, I_U bezeichnet werden.

Die Ecktransversalen durch P bzw. die zugehörigen vierten harmonischen Strahlen sind

$$\frac{x_i}{p_i} - \frac{x_k}{p_k} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_i}{p_i} + \frac{x_k}{p_k} = 0, \qquad i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k,$$

die Harmonikale wird daher

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0, \quad \text{d. h.:}$$

Die Gleichungen

(1) $\dfrac{x_1}{p_1} + \dfrac{x_2}{p_2} + \dfrac{x_3}{p_3} = 0$ in Punktkoordinaten und $\dfrac{u_1}{h_1} + \dfrac{u_2}{h_2} + \dfrac{u_3}{h_3} = 0$ in Linienkoordinaten

stellen Harmonikale und harmonischen Pol dar, wenn

(2) $$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3}$$

ist. Die Gleichung von U_P sei $\lambda x_2 x_3 + \mu x_3 x_1 + \nu x_1 x_2 = 0$; die Tangente im Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ also $\lambda x_2 + \mu x_1 = 0$. Ihre Identität mit $\dfrac{x_1}{p_1} + \dfrac{x_2}{p_2} = 0$ erfordert $\lambda : \mu = p_1 : p_2$, und weiter gilt $\lambda : \mu : \nu = p_1 : p_2 : p_3$.

Ebenso sei $\varrho u_2 u_3 + \sigma u_3 u_1 + \tau u_1 u_2 = 0$ die Gleichung von I_P; der Berührungspunkt auf der Geraden $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ also $\varrho u_2 + \sigma u_1 = 0$. Da durch ihn auch die Ecktransversale mit den Koordinaten $\dfrac{1}{p_1} : -\dfrac{1}{p_2} : 0 = h_1 : -h_2 : 0$ geht, so folgt $\varrho : \sigma : \tau = h_1 : h_2 : h_3$. Also lautet die Gleichung

des Umkegelschnittes U_P

(3) $$\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \frac{p_3}{x_3} = 0$$

des Inkegelschnitts I_P

$$\frac{h_1}{u_1} + \frac{h_2}{u_2} + \frac{h_3}{u_3} = 0.$$

Wir fragen nun nach allen Punkt-Geradenpaaren Q, G, die gleichzeitig für beide Kegelschnitte U_P, I_P Pol und Polare (im Sinne der Kegelschnittlehre) sind. Allgemein gilt für einen Punkt Q mit $q_1 : q_2 : q_3$ und eine Gerade G mit $g_1 : g_2 : g_3$ diese Beziehung in bezug auf einen Kegelschnitt

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i x_k = 0, \qquad a_{ik} = a_{ki},$$

dann und nur dann, wenn

$$g_1 : g_2 : g_3 = \sum_{i=1}^{3} a_{1i} q_i : \sum_{i=1}^{3} a_{2i} q_i : \sum_{i=1}^{3} a_{3i} q_i,$$

für unsern Kegelschnitt U_P also, wenn

(I) $$g_1 : g_2 : g_3 = (p_2 q_3 + q_2 p_3) : (p_3 q_1 + q_3 p_1) : (p_1 q_2 + q_1 p_2).$$

Ebenso ist für die Polarität von G und Q bezüglich I_P notwendig und hinreichend, daß

(II) $$q_1 : q_2 : q_3 = (h_2 g_3 + g_2 h_3) : (h_3 g_1 + g_3 h_1) : (h_1 g_2 + g_1 h_2).$$

Beide Bedingungen zusammengenommen führen, wenn man (2) berücksichtigt und vorübergehend $\dfrac{q_1}{p_1} = x$, $\dfrac{q_2}{p_2} = y$, $\dfrac{q_3}{p_3} = z$ setzt, auf

$$(x + y + z)(y - z) = 0$$

Hiernach kann sein:

a) $x + y + z = 0$, d. h. Q liegt auf H_P; aus Dualitätsgründen geht dann G durch P_H.

b) $y - z = 0$, was entweder auf $x = -2z = -y - z$, also wieder auf Fall a) führt, oder aber auf $x = y = z$, d. h. P ist ein solcher Pol und aus Dualitätsgründen dann H_P seine Polare.

Jede der Bedingungen ist aber auch hinreichend. Denn umgekehrt werden unter der Bedingung (2) die Gleichungen (I) und (II) erfüllt, wenn man in ihnen $q_i = p_i$, $g_i = h_i$, $i = 1, 2, 3$ setzt. P und H_P sind also wirklich Pol und Polare in bezug auf U_P und I_P. Auch findet man für die Polare $g_1 : g_2 : g_3$ eines auf H_P liegenden Punktes $q_1 : q_2 : q_3$ in bezug auf U_P nach (I) und in bezug auf I_P nach (II) dieselben Koordinaten, nämlich

$$g_1 : g_2 : g_3 = h_1^2 q_1 : h_2^2 q_2 : h_3^2 q_3 \equiv \frac{q_1}{p_1^2} : \frac{q_2}{p_2^2} : \frac{q_3}{p_3^2},$$

womit die Identität solcher Polaren in bezug auf *beide* Kegelschnitte bewiesen ist. Nach der Polarentheorie gehen sie durch P. Also:

Die Kegelschnitte U_P, I_P haben nur folgende gemeinsamen Pol-Polarsysteme:

a) *Die Punkte von H_P haben in bezug auf U_P und H_P gemeinsame Polaren durch P.*

b) *P selbst hat (infolgedessen) in bezug auf U_P und I_P die Gerade H_P zur gemeinsamen Polaren.*

Nur das letztere System ist (im reellen Gebiet) zugleich ein solches von harmonischem Pol und zugehöriger Harmonikalen. Käme nämlich auch unter a) ein solcher Fall vor, d. h. schickte ein auf H_P liegender Punkt $q_1 : q_2 : q_3$ seine Harmonikale durch P, so müßten $\frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3}$ und $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}$ $(p_1 p_2 p_3 \neq 0, q_1 q_2 q_3 \neq 0)$ gleichzeitig verschwinden, und das ist bei ausschließlich reellen p_i, q_i jedenfalls nicht möglich.

Aus den Gleichungen (3) für U_P und I_P folgt durch Vergleich mit den Gleichungen (1) für H_P und P:

Durchläuft ein Punkt Q eine Gerade H_P, so beschreibt seine Harmonikale H_Q als Tangente den Inkegelschnitt $I_H \equiv I_P$ [3]*).*

Dreht sich eine Gerade G um einen Punkt P_H, so durchläuft ihr harmonischer Pol P_G den Umkegelschnitt $U_P \equiv U_H$ [3]*).*

Denn — um etwa den links stehenden Satz zu erledigen — nach (2) sind die Linienkoordinaten von H_P den Punktkoordinaten von P umgekehrt proportional und ebenso die Punktkoordinaten von Q den Linienkoordinaten von H_Q. — Allgemein: die Harmonikalen einer Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ (in Punktkoordinaten) umhüllen die Kurve $f\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}\right) = 0$ (in Linienkoordinaten). Sie heiße die *harmonikale Kurve* zu $f(x, x_2, x_3) = 0$. Ebenso ist zu den Tangenten einer Kurve $g(u_1, u_2, u_3) = 0$ (in Linienkoordinaten) die Kurve $g\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right) = 0$ der Ort ihrer harmonischen Pole; sie heiße die *harmonikaloide Kurve* der ersten Kurve. Die Sätze heißen dann:

Die harmonikale Kurve einer Geraden H ist ihr Inkegelschnitt I_H.

Die harmonikaloide Kurve eines Punktes P ist sein Umkegelschnitt U_P.

Es entspricht den eingangs bemerkten, *nicht* eindeutigen Fällen harmonikaler Abbildung, daß der Kurve I_H die Seiten des Grunddreiecks als Tangenten, und der Kurve U_P von P seine Ecken als Punkte angehören.

Nun einige Sätze über Scharen von Um- und Inkegelschnitten.

[3]) Moser, l. c.

Die Umkegelschnitte U_Q aller auf H_P gelegenen Punkte Q gehen außer durch die drei Grundecken auch durch P_H, bilden also ein Büschel von Kurven zweiter Ordnung [4]).

Die Inkegelschnitte I_G aller P_H passierenden Geraden G berühren außer den drei Grundseiten die Gerade H_P, bilden also ein Büschel von Kurven zweiter Klasse.

Denn die Gleichung $\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3}=0$ sagt sowohl aus, daß Q auf der Geraden $\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\frac{x_3}{p_3}=0$ liegt, wie daß P dem Kegelschnitt $\frac{q_1}{x_1}+\frac{q_2}{x_2}+\frac{q_3}{x_3}=0$ angehört, usw.

Die Inkegelschnitte I_Q der auf H_P gelegenen Punkte Q bilden kein Büschel, besitzen aber eine Umhüllende, die nun gefunden werden soll. Die I_Q haben die Gleichung

$$\frac{1}{q_1u_1}+\frac{1}{q_2u_2}+\frac{1}{q_3u_3}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\lambda u_1}+\frac{1}{\mu u_2}+\frac{1}{u_3}=0,$$

wenn $\frac{q_1}{q_3}=\lambda$, $\frac{q_2}{q_3}=\mu$ gesetzt wird. Liegt Q auf H_P, so wird $\mu=-\frac{h_3+\lambda h_1}{h_2}$, und Einsetzen in die Gleichung für I_Q ergibt die einparametrige Kurvenschar

$$\frac{h_3+\lambda h_1}{u_1}-\frac{\lambda h_2}{u_2}+\frac{\lambda h_3+\lambda^2 h_1}{u_3}=0.$$

Nach bekannter Methode finden wir daraus ihre Umhüllende und so den linksstehenden Satz, der mit seinem dualistischen Analogon lautet:

Die Inkegelschnitte I_Q aller auf H_P gelegenen Punkte Q werden umhüllt von der Kurve vierter Klasse K_4:

(4) $$\frac{h_1^2}{u_1^2}+\frac{h_2^2}{u_2^2}+\frac{h_3^2}{u_3^2}-2\left(\frac{h_2h_3}{u_2u_3}+\frac{h_3h_1}{u_3u_1}+\frac{h_1h_2}{u_1u_2}\right)=0.$$

Die Umkegelschnitte U_G aller durch P_H laufenden Geraden G werden umhüllt von der Kurve vierter Ordnung O_4:

$$\frac{p_1^2}{x_1^2}+\frac{p_2^2}{x_2^2}+\frac{p_3^2}{x_3^2}-2\left(\frac{p_2p_3}{x_2x_3}+\frac{p_3p_1}{x_3x_1}+\frac{p_1p_2}{x_1x_2}\right)=0.$$

Im Satze links ist die Umhüllende aufgefaßt als Ort der gemeinsamen Tangenten, im Falle rechts als Ort der gemeinsamen Punkte konsekutiver Kurven der Schar.

Eine andere Bedeutung der Kurven K_4, O_4 tritt zutage, wenn wir jetzt entgegen Früherem I_P als Ordnungskurve und U_P als Klassenkurve schreiben. Ein Klassenkegelschnitt

$$\sum_{i,k=1}^{3} b_{ik}u_iu_k=0, \qquad b_{ik}=b_{ki},$$

hat in Punktkoordinaten die Gleichung

$$\sum_{i,k,l=1}^{3}[(b_{kl}^2-b_{kk}b_{ll})x_i^2+2(b_{ii}b_{kl}-b_{ik}b_{il})x_kx_l]=0, \qquad i\neq k,\ k\neq l,\ l\neq i.$$

Daraus ergibt sich für

I_P

$$\frac{x_1^2}{p_1^2}+\frac{x_2^2}{p_2^2}+\frac{x_3^2}{p_3^2}-2\left(\frac{x_2x_3}{p_2p_3}+\frac{x_3x_1}{p_3p_1}+\frac{x_1x_2}{p_1p_2}\right)=0.$$

U_P

$$\frac{u_1^2}{h_1^2}+\frac{u_2^2}{h_2^2}+\frac{u_3^2}{h_3^2}-2\left(\frac{u_2u_3}{h_2h_3}+\frac{u_3u_1}{h_3h_1}+\frac{u_1u_2}{h_1h_2}\right)=0.$$

Ersetzt man links die x_i durch $\frac{1}{u_i}$, rechts die u_i durch $\frac{1}{x_i}$ und benutzt (3), so ent-

[4]) Moser, l. c.

stehen gerade die Gleichungen (4), d. h. die Kurve (4) links ist zugleich die harmonikale Kurve von I_P, und die Kurve (4) rechts die harmonikaloide von U_P:

Die Umhüllende K_4 aller Kurven I_Q, deren harmonische Pole Q die Gerade H_P durchlaufen, ist zugleich die harmonikale Kurve von I_P.

Die Umhüllende O_4 aller Kurven U_G, deren Harmonikalen G durch den Punkt P_H gehen, ist zugleich die harmonikaloide Kurve von U_H.

Was wird aus den Kurven K_4, O_4, wenn das Grunddreieck gleichseitig ist und P in sein Zentrum O, also H_P in die uneigentliche Gerade fällt?

Um dies für K_4 zu beantworten, bestimmen wir die Gleichung von K_4 in Punktkoordinaten. Seien jetzt x_1, x_2, x_3 die wahren[5]) Abstände eines Punktes von den Grundseiten, so daß

$$(5) \qquad -x_1 - x_2 - x_3 = h = 3\varrho = \frac{3}{2} r$$

ist, wenn wir für einen Punkt im Innern des gleichseitigen Dreiecks seine Koordinaten negativ rechnen und unter h, ϱ, r seine Höhe, bzw. Inkreisradius, bzw. Umkreisradius verstehen. Setzen wir $\frac{u_1}{u_3} = \lambda$, $\frac{u_2}{u_3} = \mu$, so läßt sich die Gleichung (4) von K_4 umformen in:

$$(a) \qquad (\lambda + \mu + 2 - \lambda\mu)^2 - 4(\lambda + \mu + 1) = 0.$$

Dies ist also die Bedingung dafür, daß

$$(b) \qquad \lambda x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0$$

Tangente an K_4 sei. Elimination von μ aus (a), (b) ergibt

$$[(\lambda^2 - \lambda)x_1 + (\lambda + 2)x_2 + (\lambda - 1)x_3]^2 + 4[\lambda x_1 x_2 - (\lambda + 1)x_2^2 + x_2 x_3] = 0.$$

Da dieser Gleichung wieder die Punkte der Tangente (b) genügen, so muß ihre linke Seite in zwei Linearfaktoren zerfallen. Ein solcher Faktor ist

$$F \equiv (\lambda - 1)^2 \lambda x_1 + (\sqrt{\lambda} + 1)^2 \lambda x_2 + (\lambda - 1)^2 x_3;$$

der andere entsteht daraus durch Vorzeichenänderung von $\sqrt{\lambda}$. Beide Faktoren ergeben also dieselbe Geradenschar. Setzen wir $\sqrt{\lambda} = \alpha$ und berücksichtigen (5), so geht $F = 0$ über in:

$$(\alpha^4 + 2\alpha^3)x_1 + (2\alpha + 1)x_2 - 3\varrho\alpha^2 = 0.$$

Jetzt liefert Elimination von α aus $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ nach einiger Rechnung

$$(6) \qquad x_1 x_2 x_3 + \varrho^3 = 0$$

als Gleichung der speziellen K_4. Um sie zu identifizieren, transformieren wir sie auf kartesische Koordinaten x, y. Das Achsenkreuz legen wir so:

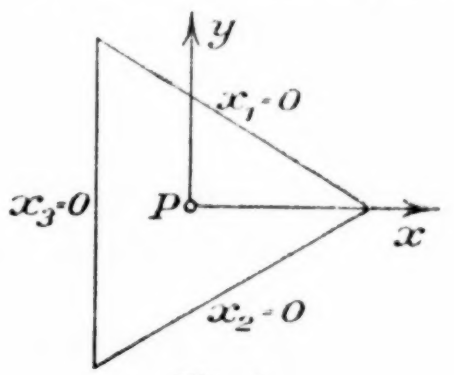

Fig. 1.

[5]) Bei den bisher wesentlich projektiven Betrachtungen war diese engere Definition nicht nötig.

Die Substitutionen werden dann:

$$(7)\quad x_1 = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3} - 2\varrho),\quad x_2 = \frac{1}{2}(x - y\sqrt{3} - 2\varrho),\quad x_3 = \frac{1}{2}(-2x - 2\varrho),$$

und (6) geht über in (siehe (5))

$$h(x^2 + y^2) - x(x^2 - 3y^2) = 0$$

oder bei Einführung von Polarkoordinaten P, ω, wenn die x-Achse als Polarachse genommen wird,

$$\mathsf{P} = \frac{h}{\cos 3\omega}.$$

Dies ist eine *Trisektrix von Longchamps* [6]) — siehe Fig. 2 unten —, deren drei Scheitelpunkte einen Kreis vom Radius h äußerlich berühren in Punkten, die mit je einer Ecke des Grunddreiecks auf einem Radius liegen. Die Kurve I_0 ist der Inkreis des Dreiecks vom Radius $\varrho = \frac{h}{3}$. Durch seine harmonikale Abbildung auf die Trisektrix wird auch eine Zuordnung von Punkten hergestellt, nämlich der Punkte von I_0 (Amplitude φ) zu den Berührungspunkten ihrer Harmonikalen auf der Trisektrix (Amplitude ω). Man findet

$$\omega = -\frac{\varphi}{2}.$$

In der Figur ist diese Zuordnung für einige ausgezeichnete Punkte durch entsprechende Bezifferung angedeutet.

Die Kurve O_4 liegt bereits in Punktkoordinaten vor (Gleichung (4) rechts). Sie wird im speziellen Falle unter Berücksichtigung von (5):

$$(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)^2 + 6rx_1x_2x_3 = 0.$$

Transformiert man sie durch (7), so entsteht

$$(x^2 + y^2)^2 + \frac{8}{3}rx(3y^2 - x^2) + 2r^2(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}r^4 = 0,$$

d. i. die Gleichung einer *dreispitzigen Hypozykloide* [7]) (*Steinersche Kurve*) — siehe Fig. 3 unten —, deren Spitzen in die Ecken des gleichseitigen Grunddreiecks vom Umkreisradius r fallen. Sie entsteht durch Rollen eines Kreises vom Radius $\frac{r}{3}$ in diesem Umkreise. Auch hier fragen wir nach der durch die Harmonikale vermittelten Abbildung ihrer Berührungspunkte mit dem Umkreise U_0 auf die harmonischen Pole auf der Hypozykloide.

Zur Beantwortung brauchen wir die Beziehung zwischen der Harmonikalen $g_1 : g_2 : g_3$ und ihrem harmonischen Pol $q_1 : q_2 : q_3$ in kartesischen bzw. Polarkoordinaten. Durch (7) geht die Gleichung der Geraden

$$g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 = 0$$

über in

$$(g_1 + g_2 - 2g_3)\,x + \sqrt{3}(g_1 - g_2)\,y - r(g_1 + g_2 + g_3) = 0.$$

Berührt sie den Umkreis (r) und ist φ die Amplitude ihres Berührungsradius, so folgt

$$\alpha \equiv \cos\varphi = \frac{g_1 + g_2 - 2g_3}{g_1 + g_2 + g_3},\qquad \beta \equiv \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}(g_1 - g_2)}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

[6]) Loria, Spezielle algebraische und transzendente Kurven I, 2. Auflage, S. 92.

[7]) Loria, l. c. S. 160.

Die Auflösung beider Gleichungen nach q_1, q_2, q_3 ergibt, wegen $q_1 : q_2 : q_3 = \frac{1}{g_1} : \frac{1}{g_2} : \frac{1}{g_3}$,

$$q_1 = k(4 - 2\alpha - 2\alpha^2 - 2\beta\sqrt{3} + 2\alpha\beta\sqrt{3}),$$
$$q_2 = k(4 - 2\alpha - 2\alpha^2 + 2\beta\sqrt{3} - 2\alpha\beta\sqrt{3}),$$
$$q_3 = k(4 + 4\alpha + \alpha^2 - 3\beta^2).$$

k bestimmt sich aus $q_1 + q_2 + q_3 = -\frac{3}{2} r$ zu $k = -\frac{r}{6}$. Jetzt wird nach (7)

$$\begin{cases} x = q_1 + q_2 + r = \frac{r}{3}(2\alpha + 2\alpha^2 - 1) = \frac{r}{3}(2\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_1 - q_2) = \frac{r}{6}(4\beta - 4\alpha\beta) = \frac{2r}{3}\sin\varphi\,(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

der harmonische Pol zur Geraden r, φ.

Das ist gerade die Parameterdarstellung der Hypozykloide mit Hilfe des Wälzungswinkels φ. Während der Berührungspunkt des rollenden Kreises $\left(\frac{r}{3}\right)$ sich durch den Bogen φ bewegt hat, hat er sich gleichzeitig um 3φ gedreht; d. h., wenn wir auf die ursprüngliche Bedeutung von φ zurückgreifen:

Während der Bewegung des rollenden Kreises bleibt der erzeugende Punkt harmonischer Pol der gemeinsamen Tangente von rollendem und festem Kreis.

Eine Kollineation zweier Ebenen ist dadurch festgelegt, daß man vier ein Viereck bildenden Punkten der einen Ebene vier ein Viereck bildende Punkte der andern Ebene zuordnet. Ordnen wir also den Ecken eines beliebigen Grunddreiecks und einem Punkte P allgemeiner Lage die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bzw. sein Zentrum O zu, so erhalten wir wegen der Invarianz harmonischer Beziehungen:

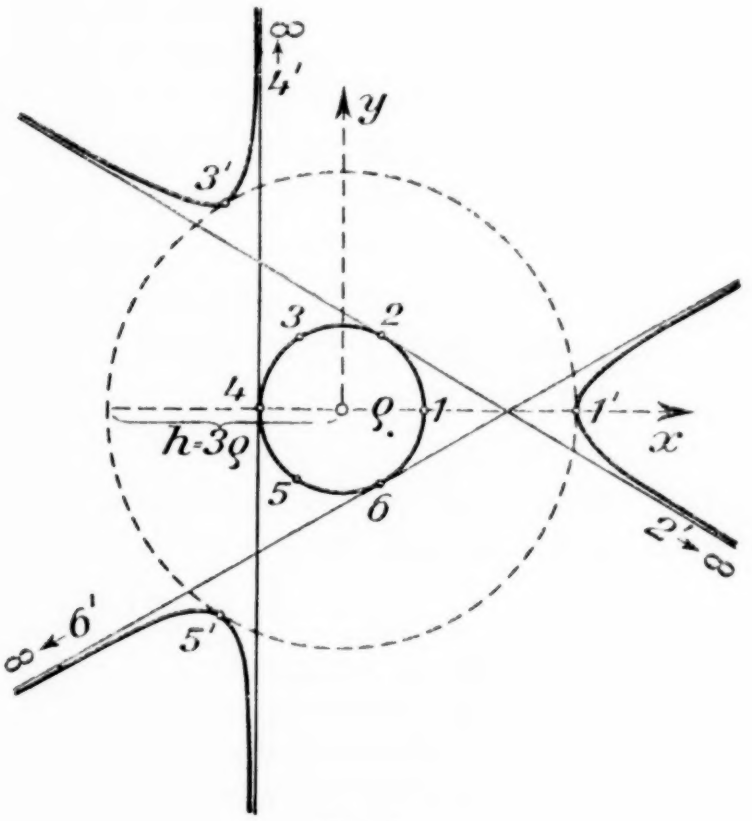

Fig. 2.

Gewöhnliche Strichart: Asymptoten der Trisektrix, zugleich Grunddreieck. *Stärker ausgezogene Strichart:* Inkreis und seine harmonikale Kurve, die Trisektrix. *Unterbrochene Strichart:* Scheitelkreis.

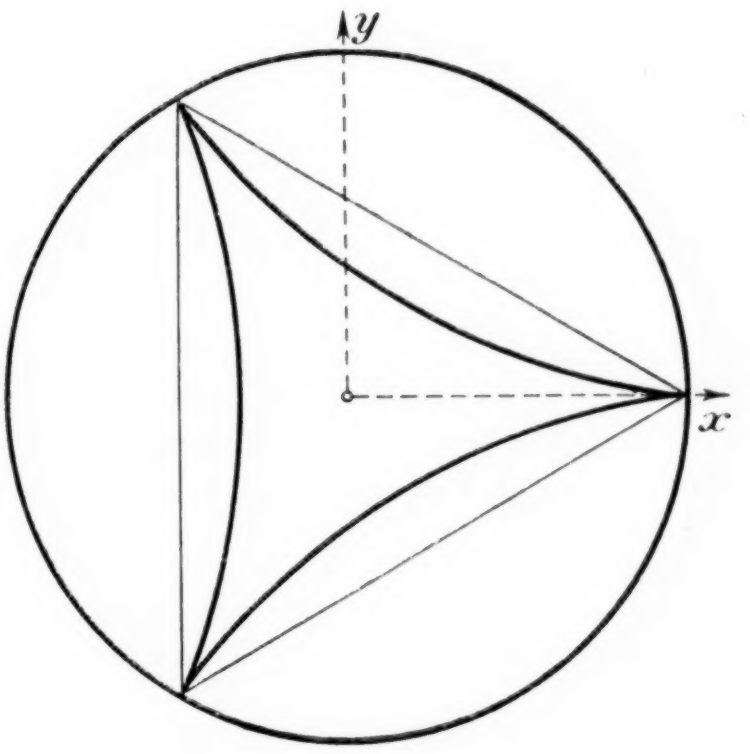

Fig. 3.

Gewöhnliche Strichart: Grunddreieck. *Stärker ausgezogene Strichart:* Umkreis und seine Harmonikaloide, die Hypozykloide.

Bei beliebig vorgegebenem Grunddreiseit, das mit einer Geraden G ein wirkliches Vierseit bildet, ist die Kurve K_4 kollinear verwandt einer Trisektrix von Longchamps. Sie umhüllt alle die Seiten des Dreiseits berührenden Kegelschnitte, deren Brianchonsche Punkte die Gerade G durchlaufen.

Bei beliebig vorgegebenem Grunddreieck, das mit einem Punkte P ein wirkliches Viereck bildet, ist die Kurve O_4 kollinear verwandt einer Steinerschen Hypozykloide. Sie umhüllt alle durch die Ecken des Grunddreiecks gehenden Kegelschnitte, deren Pascalsche Geraden durch den Punkt P gehen.

Die hier zutage tretende duale Verwandtschaft von Trisektrix und Hypozykloide scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein.

Eingegangen 7. November 1934.

Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper.

Von *Ernst Witt* in Göttingen.

Die Theorie der algebraischen Zahlkörper läßt sich, wie man weiß, in ganz entsprechender Weise auch für Funktionenkörper mit endlich vielen Konstanten entwickeln. Die Übertragung ist jedoch bis heute noch in zwei wesentlichen Punkten unvollständig, es fehlen nämlich Beweise

1. für die **Existenz abelscher Körper** zu vorgelegter Divisorengruppe,
2. für die **Funktionalgleichung** der L-Reihen.

Die erste der beiden Lücken soll in dieser Arbeit ausgefüllt werden. Da die Körpercharakteristik p nicht Null ist, haben wir zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Geht p nicht im Index der Divisorengruppe auf, so können wir den Beweis von Herbrand übertragen [1]). Zur Körperkonstruktion verwenden wir Gleichungen von der Form $x^n = a$.

Bei dieser Gelegenheit werden wir die algebraische Theorie der *Kummerschen Körper* in einfacher Weise neu begründen.

Ist dagegen der Index eine Potenz von p, so bedienen wir uns der Artin-Schreierschen Normalform $x^p - x = a$. Ein Analogon der Theorie Kummerscher Körper erhalten wir hier, indem wir einfach alle Produkte additiv schreiben. Es ist bemerkenswert, daß der Existenzbeweis im vorliegenden Falle viel einfacher geführt werden kann. Durch direktes Schließen mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes werden lange Indexrechnungen vermieden.

Zu Beginn seien einige Bemerkungen über den allgemeinen Aufbau der Theorie der abelschen Körper gestattet.

Die Arbeiten von Hasse [2]) haben gezeigt, daß sich das **Artinsche Reziprozitätsgesetz** für abelsche Körper in einfacher Weise aus dem analytischen Verhalten der L-Reihen und der hyperkomplexen Theorie der Schiefkörper ergibt. Es soll noch erwähnt werden, daß sich an dieser Stelle auch gleich der **Führer-Verzweigungssatz** gewinnen läßt.

[1]) F. K. Schmidt hat die Möglichkeit einer Übertragung schon erörtert in seiner Arbeit: Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich, Sitzungsber. Erlangen **62** (1930), S. 267—284.

[2]) H. Hasse, a) Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107** (1933), S. 731—760.

b) Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Crelles Journal **172** (1934), S. 37—54.

c) Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik p, Crelles Journal **172** (1934), S. 77—85.

Der bei Hasse [3]) angegebene Nachweis für den lokalen Führer $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ versagt im allgemeinen bei Funktionenkörpern mit Primzahlcharakteristik p, denn die Funktionen e^x und $\log x$ lassen sich nicht einführen, die Binomialreihe auch nur dann, wenn p nicht im Nenner des Exponenten aufgeht. Wir geben daher eine Schlußweise an, die stets anwendbar ist.

k sei ein perfekter Körper, K eine separable Erweiterung. Da die nach Dedekind aus lauter Spuren bestehende Diskriminante nicht verschwindet, gibt es sicher ein A mit $\mathrm{Sp}\, A \neq 0$. Durch $1 + y = \mathrm{N}(1 + xA) = 1 + x\mathrm{Sp}A + \cdots$ wird also eine Potenzreihe $y(x)$ definiert, die sich umkehren läßt. Da die Reihe $x(y)$ für alle hinreichend kleinen Werte von y konvergiert, sehen wir, daß alle hinreichend nahe bei 1 gelegenen Zahlen $1 + y$ Normen von Zahlen aus K sind. Nun kann wie bei Hasse weitergeschlossen werden.

Die Voranstellung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes hat eine große Wandlung mit sich gebracht. Die frühere Klassenkörpertheorie ist heute einer **Theorie der abelschen Körper** gewichen. Die früher an die Spitze gestellte Takagische Definition des **Klassenkörpers** hat heute eine andere Bedeutung. Sie dient nur noch zur Gewinnung eines handlichen **Kriteriums für abelsche Körper.** Ein solches Kriterium wird nämlich für den vollständigen Beweis des **Existenzsatzes** benötigt.

Nach dem bisherigen Aufbau ist klar, daß ein abelscher Körper die Klassenkörpereigenschaft besitzt. Daß umgekehrt diese Eigenschaft nur den abelschen Körpern zukommt, wird folgendermaßen gezeigt. Die Sätze über Kompositum, Anordnung, Eindeutigkeit, Verschiebung und über Unterkörper von Klassenkörpern liefern in bekannter Weise die Tatsache, daß jeder Klassenkörper K/k galoissch ist, und daß die galoissche Gruppe eine Hamiltonsche Gruppe ist [4]). Nach einer Idee von Iyanaga kann nun leicht geschlossen werden, daß die Gruppe abelsch ist. Bezeichnet W/k die konstante Erweiterung achten Grades, so ist auch KW/k ein Klassenkörper, und seine galoissche Gruppe enthält ein Element der Ordnung 8. Nach Dedekind [5]) ist aber eine solche Hamiltonsche Gruppe sogar abelsch. Also ist KW/k und erst recht der Klassenkörper K/k ein abelscher Körper.

Bei den algebraischen Zahlkörpern läßt sich der Satz von Dedekind vermeiden, wenn wir die Überkreuzungsmethode anwenden. σ, τ seien Automorphismen von K/k, der Grad sei n. Wir wählen eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod n$ so, daß der Körper W der p-ten Einheitswurzeln fremd ist zu K. w erzeuge die Gruppe von W/k. Da die Gruppe von KW/k Hamiltonsch ist, gilt $\sigma(w\tau)\sigma^{-1} = (w\tau)^x$ oder $w \cdot \sigma\tau\sigma^{-1} = w^x\tau^x$. Es folgt $w^x = w$ oder $x \equiv 1 \pmod{p-1}$, daher auch $x \equiv 1 \pmod n$ oder $\tau^x = \tau$, also $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau$. Der Klassenkörper K/k ist somit ein abelscher Körper.

I. Faktoren- und Summandensysteme in galoisschen Körpern.

Mit $\sigma, \tau, \ldots$ seien die Automorphismen des galoisschen Körpers K/k bezeichnet. Dabei sei k ein beliebiger Körper und natürlich K/k separabel. Jedem σ sei eine Zahl A_σ aus K zugeordnet. Aus der Theorie der verschränkten Produkte ist folgender Satz bekannt:

(1) *Bestehen die Relationen $A_\sigma A_\tau^\sigma = A_{\sigma\tau}$, so gibt es eine solche Zahl B, daß $A_\sigma = B^{1-\sigma}$ gilt.*

B läßt sich auch explizit darstellen durch $\sum_\tau A_\tau C^\tau$, man hat nur durch passende Wahl von C dafür zu sorgen, daß dieser Ausdruck nicht verschwindet.

Der Satz bleibt richtig, wenn er additiv gewendet wird:

(2) *Bestehen die Relationen $A_\sigma + \sigma A_\tau = A_{\sigma\tau}$, so gibt es eine solche Zahl B, daß $A_\sigma = (1 - \sigma)B$ gilt.*

Zum Beweis sei C eine Hilfszahl, deren Spur nicht verschwindet. Wie man leicht nachrechnet, kann $B = \dfrac{1}{\mathrm{Sp}C} \sum_\tau A_\tau \tau C$ gewählt werden.

Es soll noch ein Satz über ein Summandensystem $A_{\sigma,\tau}$ vermerkt werden, obwohl er in dieser Arbeit nicht weiter gebraucht wird. Die im Satz auftretenden Rela-

---

[3]) A. a. O. [2]) a), S. 746.

[4]) Vgl. E. Artin, Vorträge über Klassenkörpertheorie, Göttingen 1932, und H. Hasse, Klassenkörpertheorie, Vorlesungsausarbeitung, Marburg 1933.

[5]) R. Dedekind, Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind, Math. Ann. **48** (1897), S. 548—562 = Ges. Werke II, S. 87—101.

tionen sind dem Assoziativgesetz bei Faktorensystemen nachgebildet. Behauptet wird, daß jedes Summandensystem zerfällt:

(3) *Bestehen die Relationen* $\sigma A_{\tau,\nu} + A_{\sigma,\tau\nu} = A_{\sigma,\tau} + A_{\sigma\tau,\nu}$, *so gibt es solche Größen* B_σ, *daß* $A_{\sigma,\tau} = B_\sigma + \sigma B_\tau - B_{\sigma\tau}$ *gilt.*

Man braucht nämlich nur $B_\sigma = \frac{1}{\mathrm{Sp}\, C} \sum_\tau A_{\sigma,\tau}\, \sigma\tau C$ zu setzen.

Nun denken wir uns K/k als *zyklischen* Körper vom Grade n mit dem erzeugenden Automorphismus σ. Ist dann A eine Zahl mit $\mathrm{N}A = 1$ bzw. $\mathrm{Sp}\, A = 0$, so können wir $A_{\sigma^\nu} = A^{\frac{1-\sigma^\nu}{1-\sigma}}$ bzw. $A_{\sigma^\nu} = \frac{1-\sigma^\nu}{1-\sigma} A$ setzen. Die beiden Sätze erscheinen dadurch in neuer Form:

(1′) *Ist* $\mathrm{N}A = 1$, *so hat* A *die Gestalt* $B^{1-\sigma}$ (Satz von Hilbert).

(2′) *Ist* $\mathrm{Sp}\, A = 0$, *so hat* A *die Gestalt* $(1-\sigma)\, B$.

Entsprechend einer Begründung von (1) durch verschränkte Produkte, gibt es für (2′) auch einen direkten gruppentheoretischen Beweis:

Mit $A_{1-\sigma}$ bzw. A_{Sp} bezeichnen wir den k-Modul derjenigen Zahlen aus K, die bei Multiplikation mit $1-\sigma$ bzw. bei Spurbildung Null werden. Es ist $A_{1-\sigma} = \mathrm{Sp}\, A = k$, diese Moduln haben also den Rang 1; daher haben die komplementären Moduln $(1-\sigma)\, A$ und A_{Sp} beide den Rang $n-1$ über k. Da außerdem $(1-\sigma)\, A \leq A_{\mathrm{Sp}}$ gilt, müssen beide Moduln übereinstimmen.

II. Theorie der Kummerschen Körper.

Der beliebige Grundkörper k möge die n-ten Einheitswurzeln ($n \not\equiv 0 \pmod p$) enthalten.

Erstens sei eine Zahlgruppe $\omega \geqq \alpha^n$ so vorgelegt, daß ω/α^n endlich ist.

Wir betrachten die sämtlichen Wurzeln Θ aller Gleichungen $\Theta^n = \omega$. Die α bilden eine Untergruppe der Θ, durch Potenzieren mit n erhalten wir

$$\Theta/\alpha \cong \omega/\alpha^n .$$

Der Körper $k(\Theta)/k$ ist endlich, da er schon durch Repräsentanten der endlichen Faktorgruppe Θ/α erzeugt wird. Er ist ferner galoissch, denn mit jedem erzeugenden Θ liegen auch alle konjugierten Zahlen in $k(\Theta)$. $\sigma, \tau, \ldots$ seien die Automorphismen des Körpers. $\Theta^{1-\tau}$ ist stets eine n-te Einheitswurzel, liegt also im Grundkörper. Es gelten die Regeln

a) $\qquad \Theta^{1-\sigma}\, \mathsf{H}^{1-\sigma} = (\Theta\mathsf{H})^{1-\sigma}, \quad \alpha^{1-\sigma} = 1.$

b) $\qquad \Theta^{1-\sigma}\, \Theta^{1-\tau} = \Theta^{1-\sigma}(\Theta^{1-\tau})^\sigma = \Theta^{1-\sigma}\, \Theta^{\sigma-\sigma\tau} = \Theta^{1-\sigma\tau}.$

a) bedeutet: Bei festem σ ist $\Theta^{1-\sigma}$ ein Charakter ψ_σ der Gruppe Θ/α. Durch b) wird die Gruppe σ auf die Gruppe ψ_σ abgebildet. Die Θ sollten den Körper erzeugen, daher ist ψ_σ nur Hauptcharakter für $\sigma = 1$, es besteht also die Isomorphie $\sigma \cong \psi_\sigma$. Damit ist zunächst gezeigt, daß die Gruppe σ von $k(\Theta)/k$ abelsch vom Exponenten n ist. Nach dem Satz über die Anzahl der Charaktere einer abelschen Gruppe folgt ferner $\mathrm{Ord}\ \sigma \leqq \mathrm{Ord}\ \Theta/\alpha$.

b) bedeutet: Bei festem Θ ist $\Theta^{1-\sigma}$ ein Charakter χ_Θ der Gruppe σ. Durch a) wird die Gruppe Θ auf die Gruppe χ_Θ abgebildet. χ_Θ ist nur Hauptcharakter für $\Theta = \alpha$, daher gilt

$$\Theta/\alpha \cong \chi_\Theta .$$

Und ähnlich wie vorhin folgt hier $\mathrm{Ord}\ \Theta/\alpha \leqq \mathrm{Ord}\ \sigma$.

Beide Ungleichungen ergeben zusammen $\mathrm{Ord}\ \Theta/\alpha = \mathrm{Ord}\ \sigma$; danach durchläuft χ_Θ *alle* Charaktere der Gruppe σ. Nach dem Satz über die Isomorphie einer abelschen

Gruppe mit der zugehörigen Charakterengruppe gilt daher

$$\chi_\Theta \cong \sigma.$$

Wir fassen unsere Ergebnisse in folgendem Satz zusammen:

Die galoissche Gruppe von $k\left(\sqrt[n]{\omega}\right)/k$ *ist zur Gruppe* ω/α^n *isomorph.*

Zweitens sei ein abelscher Körper K/k vom Exponenten n vorgelegt. $\sigma, \tau, \ldots$ seien seine Automorphismen.

Wir richten unser Augenmerk auf *alle* Zahlen $\overline{\Theta}$ aus K, deren n-te Potenzen $\overline{\Theta}^n = \overline{\omega}$ in k liegen. Durch $\overline{\Theta}^{1-\sigma}$ wird die Gruppe $\overline{\Theta}/\alpha$ auf gewisse Charaktere $\chi_{\overline{\Theta}}$ der Gruppe σ isomorph abgebildet. Wir können sogar behaupten, auf *alle* Charaktere. Denn ist $\chi(\sigma)$ ein Charakter, so gilt $\chi(\sigma)\,\chi(\tau)^\sigma = \chi(\sigma\tau)$, es gibt also nach dem Satz I, (1) eine Zahl B mit $\chi(\sigma) = B^{1-\sigma}$; außerdem ist leicht zu erkennen, daß hierbei B^n im Grundkörper liegt, d. h. die Zahl B ist ein $\overline{\Theta}$. Damit haben wir aber Ord $\overline{\Theta}/\alpha$ = Ord σ nachgewiesen. Nach der vorigen Untersuchung steht hier linkerhand der Grad von $k(\overline{\Theta})/k$, rechts steht natürlich der Grad von K/k. Daher ist $K = k(\overline{\Theta})$, und wir können zusammenfassend sagen:

Zu jedem abelschen Körper K/k *vom Exponenten* n *gibt es eine solche Gruppe* $\overline{\omega}/\alpha^n$, *daß* $K = k\left(\sqrt[n]{\overline{\omega}}\right)$ *gilt.*

Gilt auch $K = k\left(\sqrt[n]{\omega}\right)$ für eine andere Gruppe ω/α^n, so ist diese in der oben konstruierten Gruppe $\overline{\omega}/\alpha^n$ enthalten. Andererseits folgt aus dem vorigen Ergebnis $\omega/\alpha^n \simeq \overline{\omega}/\alpha$ wegen $k\left(\sqrt[n]{\omega}\right) = k\left(\sqrt[n]{\overline{\omega}}\right)$. Daher ist $\omega = \overline{\omega}$, und wir haben den Zusatz:

Zum Körper K/k *gibt es nur eine solche Gruppe* ω/α^n.

III. Theorie der abelschen Körper vom Exponenten p.

Der Grundkörper k möge die Charakteristik $p \neq 0$ haben.

Aus einem formalen Grunde führen wir die Bezeichnung

$$\wp x = x^p - x$$

ein; $\wp$ ist also hier nur ein Operationszeichen. Es besteht die Regel

$$\wp x + \wp y = \wp(x + y).$$

Die Wurzeln der Gleichung $\wp x = 0$ sind genau die Zahlen des Primkörpers. Die Wurzeln einer Gleichung $\wp x = \omega$ sollen mit $\frac{\omega}{\wp}$ bezeichnet werden.

Wir sind nun imstande, sämtliche Überlegungen und Sätze des Abschnittes II fast wörtlich zu übertragen. Es ist dabei nur folgendes zu beachten:

An Stelle einer multiplikativen Gruppe $\omega \geqq \alpha^n$ wird hier eine additive Gruppe $\omega \geqq \wp\alpha$ betrachtet. Statt Wurzeln aller Gleichungen $\Theta^n = \omega$ werden hier die Wurzeln aller Gleichungen $\wp\Theta = \omega$ eingeführt. Für $\Theta^{1-\tau}$ muß hier $(1 - \tau)\Theta$ geschrieben werden, dieser Ausdruck ist auch keine Einheitswurzel, sondern stets eine Zahl des Primkörpers. Hier gelten entsprechende Regeln

a) $$(1 - \sigma)\Theta + (1 - \sigma)\mathsf{H} = (1 - \sigma)(\Theta + \mathsf{H}),$$

b) $$(1 - \sigma)\Theta + (1 - \tau)\Theta = (1 - \sigma\tau)\Theta.$$

Vorhin wurde der multiplikative Satz I, (1) angewandt, in dieser Untersuchung muß naturgemäß dafür der additive Satz I, (2) herangezogen werden. Auf diese Weise gelangen wir zu den analogen Ergebnissen:

Die galoissche Gruppe von $k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)/k$ *ist zur Gruppe* $\omega/\wp\alpha$ *isomorph.*

Zu jedem abelschen Körper K/k *vom Exponenten* p *gibt es genau eine solche Gruppe* $\omega/\wp\alpha$, *daß* $K = k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)$ *gilt.*

An dieser Stelle wollen wir kurz die arithmetische Theorie der lokalen zyklischen Erweiterungen $k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)$ streifen.

Ω sei ein vollkommener Konstantenkörper der Charakteristik p, und k der Körper aller formalen Potenzreihen in π (π-adischer Körper) mit Koeffizienten aus Ω. Wie Hasse [6]) gezeigt hat, läßt sich durch Subtraktion eines passenden $\wp\alpha$ immer erreichen, daß

ω konstant ist, falls $k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)/k$ unverzweigt ist, und daß sonst

ω die Entwicklung $\frac{b}{\pi^\lambda} + \cdots$ besitzt ($\lambda > 0$ und $\not\equiv 0 \pmod p$, $b \not\equiv 0$).

Wir zeigen jetzt, wie sich die Differente, und *unabhängig* davon der Führer im Falle eines verzweigten Körpers $k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)/k$ berechnen läßt. Wir tun das aus dem Grunde, weil im Abschnitt V der Führer für diesen Spezialfall notwendig gebraucht wird, und weil wir doch nicht gerne die Führer-Diskriminanten-Formel voraussetzen möchten. (Natürlich entspringt unseren Ausführungen ein neuer Beweis für diese Formel.)

Π sei eine Primzahl des Körpers $k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)$, Θ sei eine bestimmte Wurzel der Gleichung $\Theta^p - \Theta = \omega$. Aus der Normierung von ω folgt die Entwicklung $\Theta = \frac{c}{\Pi^\lambda} + \cdots$ ($c \not\equiv 0$). Durch Differenzieren der drei Gleichungen erhalten wir — in Idealen geschrieben: $\frac{d\omega}{d\pi} = \frac{1}{\pi^{\lambda+1}}$, $\frac{d\omega}{d\Theta} = 1$, $\frac{d\Theta}{d\Pi} = \frac{1}{\Pi^{\lambda+1}}$, also gilt für die *Differente*

$$\frac{d\pi}{d\Pi} = \left(\frac{\pi}{\Pi}\right)^{\lambda+1} = \Pi^{(p-1)(\lambda+1)}.$$

Um endlich den Führer aufzustellen, verwenden wir das einfache System $(\alpha, \omega]$, das durch die Multiplikationstabelle $u^p = \alpha$, $\wp\Theta = \omega$, $u\Theta = (\Theta + 1)u$ bestimmt ist [7]). Außer den Regeln

$$(\alpha, \omega] \cdot (\alpha', \omega] \sim (\alpha\alpha', \omega] \text{ und } (\alpha, \omega] \cdot (\alpha, \omega'] \sim (\alpha, \omega + \omega'] \text{ und } (\omega, \omega] \sim 1$$

gilt noch die wichtige Formel

$$(\alpha, \omega] \sim \left(\pi, \operatorname{Res} \frac{d\alpha}{\alpha}\omega\right],$$

welche trotz unserer allgemeineren Voraussetzung über den Körper k einem Resultat von H. Schmid [7]) entspricht, und auch mit der dort angewandten Methode bewiesen werden kann.

Ihr kann entnommen werden, daß α genau dann die Norm einer Zahl aus $k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)$ ist, wenn das Res $\frac{d\alpha}{\alpha}\omega$ die Form $\wp a$ hat; denn sonst wäre $k\left(\frac{1}{\wp}\operatorname{Res}\frac{d\alpha}{\alpha}\omega\right)$ eine konstante Erweiterung vom Grade p, also erst π^p Norm daraus.

Wir nehmen nun an, daß Ω wirklich zyklische Oberkörper vom Grade p besitzt, dann kann nicht jede Konstante von der Form $\wp a$ sein. Wählen wir zur obigen Entwicklung von ω die Konstante b' derart, daß $\lambda b' b \not\equiv \wp a$ wird, so ist einerseits $\alpha = 1 + b'\pi^\lambda$ sicher keine Norm, denn es ist Res $\frac{d\alpha}{\alpha}\omega = \lambda b' b$. Andererseits verschwindet das Residuum, wenn $\alpha \equiv 1 \pmod{\pi^{\lambda+1}}$ gewählt wird, infolgedessen ist in diesem Falle α immer Norm. Der *Führer* ist also $\pi^{\lambda+1}$.

IV. Der Herbrandsche Beweis für $n \not\equiv 0 \pmod p$.

Zuerst beweisen wir:

Der Führer einer Divisorengruppe H *vom Exponenten* n *ist quadratfrei.*

H sei nämlich mod $\mathfrak{p}_1^{\nu_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{\nu_r}$ erklärt. Ist dann $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_r}$, so können

---

[6]) A. a. O. [2]) b), S. 39.

[7]) H. Schmid, erscheint demnächst in der Math. Zeitschr.

wir die Kongruenz $\beta \equiv \xi^n \pmod{\mathfrak{p}_1^{r_1} \dots \mathfrak{p}_r^{r_r}}$ lösen, indem wir

$$\xi \equiv \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{n}}{\mu} (\beta - 1)^\mu \pmod{\mathfrak{p}_i^{r_i}}$$

wählen. H enthält daher den Strahl mod $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r$.

Wir geben nun den *Herbrandschen Beweis*[8]) des Existenzsatzes wieder. Zu dem Zweck verwenden wir folgende Bezeichnungen:

k sei ein Funktionenkörper mit p^l Konstanten,

$\mathfrak{m}' = \Pi \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{m}'' = \Pi \mathfrak{p}_1$ seien zwei quadratfreie teilerfremde Moduln,

α_1 die zu $\mathfrak{m}'$ primen Zahlen,

$\mathfrak{a}_1$ die zu $\mathfrak{m}'$ primen Divisoren,

β_1 der Strahl mod $\mathfrak{m}'$,

$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1^n \Pi \mathfrak{p}_1^x$ (x durchläuft alle ganzen Zahlen),

$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^x$, der Hilfsdivisor $\mathfrak{d}$ sei dabei prim zu $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}''$ und habe positiven Grad.

Der Index 1 deutet also an, daß die betreffende Gruppe zu $\mathfrak{m}'$ prime Elemente enthält. Für den Index 2 seien die analogen Gruppen definiert.

Wir machen nun die einschränkende Annahme über den Grundkörper k, daß er *die n-ten Einheitswurzeln enthält.* Für die Einheiten (Konstanten) ist dann $(\varepsilon : \varepsilon^n) = n$, das Entsprechende gilt für die primen Restklassen $\varrho \bmod \mathfrak{p}$: $(\varrho : \varrho^n) = n$. Folglich ist $(\alpha_1 : \alpha_1^n \beta_1) = \prod_{\mathfrak{p}_2} (\varrho : \varrho^n) = n^{P_2}$, wo P_2 die Anzahl der verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{p}_2$ im Modul $\mathfrak{m}'$ andeutet.

Durch die Forderungen

$$\text{a)} \quad (\omega) = \mathfrak{a}^n \Pi \mathfrak{p}_2^x, \qquad \text{b)} \quad \omega = \alpha^n \beta_2$$

wird eine Zahlgruppe ω festgelegt. Nach der algebraischen und arithmetischen Theorie der Kummerschen Körper hat der Körper $K' = k\left(\sqrt[n]{\omega}\right)$ den Grad $(\omega : \alpha^n)$, und er ist der größte abelsche Körper vom Exponenten n mit den beiden Eigenschaften:

a) höchstens die $\mathfrak{p}_2$ sind verzweigt,

b) alle $\mathfrak{p}_1$ werden voll zerlegt.

K' ist also Klassenkörper für eine Divisorengruppe H_1, die sich mod $\mathfrak{m}'$ erklären läßt. H_1 enthält sicher $\mathfrak{a}_1^n$, $\mathfrak{p}_1^x$, β_1, mithin die Gruppe $G_1 = \mathfrak{b}_1 \beta_1$, und für die Indizes gilt $(H_1) \leqq (G_1)$.

Wir wollen zeigen, daß K' *Klassenkörper zur Divisorengruppe* $G_1 = \mathfrak{b}_1 \beta_1$ ist. Dazu brauchen wir nur $(H_1) = (G_1)$ nachzuweisen.

Zur Umformung von (H_1) führen wir die Gruppe $\omega_2 = \omega_1 \cap \alpha_2$ ein, sie kann auch definiert werden durch

$$\text{a)} \quad (\omega_2) = \mathfrak{a}_2^n \Pi \mathfrak{p}_2^x, \qquad \text{b)} \quad \omega_2 = \alpha_2^n \beta_2,$$

es ist also $(\omega_2) = \mathfrak{b}_2 \cap (\alpha_2^n \beta_2)$.

Jede Zahl ω kann durch Division durch ein passendes α^n in eine Zahl ω_2 verwandelt werden, daher ist $\omega = \omega_2 \alpha^n$. Weiter gilt $\omega_2 \cap \alpha^n = \alpha_2^n$. Dies führt zur Umformung

$$(H_1) = (\omega : \alpha^n) = (\omega_2 \alpha^n : \alpha^n) = (\omega_2 : \omega_2 \cap \alpha^n) = (\omega_2 : \alpha_2^n).$$

Schließlich bleibt noch (G_1) umzurechnen.

$$(G_1) = (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{b}_1 \beta_1) = \frac{(\mathfrak{a}_1 : \alpha_1^n \beta_1 \mathfrak{d}^n)}{(\mathfrak{b}_1 \beta_1 : \alpha_1^n \beta_1 \mathfrak{d}^n)} = \frac{A}{B};$$

[8]) Vgl. Hasse, a. a. O. [4]).

für den Zähler und Nenner ist weiter

$$A = (\mathfrak{a}_1 : \alpha_1 \mathfrak{z}) \cdot (\alpha_1 \mathfrak{z} : \alpha_1^n \beta_1 \mathfrak{z}^n) = (\mathfrak{a}_1^n : \alpha_1^n \mathfrak{z}^n) \cdot ((\alpha_1) : (\alpha_1^n \beta_1)) \cdot (\mathfrak{z} : \mathfrak{z}^n)$$

$$B = (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_1 \frown \alpha_1^n \beta_1 \mathfrak{z}^n) = (\mathfrak{b}_1 : \omega_1 \mathfrak{z}^n) = \frac{(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}_1^n) \cdot (\mathfrak{a}_1^n : \alpha_1^n \mathfrak{z}^n)}{(\omega_1 \mathfrak{z}^n : \alpha_1^n \mathfrak{z}^n)}.$$

Wird $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}_1^n) = n^{P_1}$, $(\mathfrak{z} : \mathfrak{z}^n) = n$ und $(\omega_1 \mathfrak{z}^n : \alpha_1^n \mathfrak{z}^n) = ((\omega_1) : (\alpha_1^n))$ beachtet, so erhalten wir

$$(G_1) = ((\alpha_1) : (\alpha_1^n \beta_1)) \cdot ((\omega_1) : (\alpha_1^n))\, n^{1-P_1}.$$

Beim Übergang zu Zahlgruppen müssen wir dividieren durch

$$(\varepsilon : \varepsilon \frown \alpha_1^n \beta_1) \quad \text{und durch} \quad (\varepsilon \frown \omega_1 : \varepsilon \frown \alpha_1^n) = (\varepsilon \frown \alpha_1^n \beta_1 : \varepsilon^n),$$

also durch $(\varepsilon : \varepsilon^n) = n$. Es ist jetzt

$$(H_1) \leqq (G_1) = n^{P_1} (H_2)\, n^{-P_1}.$$

Durch Vertauschung der Indizes entsteht eine ähnliche Relation, beide zusammengenommen liefern das gewünschte Resultat $(H_1) = (G_1)$.

Setzen mir $\mathfrak{m}'' = 1$, so wird $G_1 = \mathfrak{a}_1^n \beta_1$. G_1 ist also die kleinste Divisorengruppe vom Exponenten n, die sich mod $\mathfrak{m}'$ erklären läßt, und ihr ist ein abelscher Körper zugeordnet. Durch Zurückgehen auf die Unterkörper folgt dann: Wenn k die n-ten Einheitswurzeln enthält, gibt es zu jeder vorgelegten Gruppe vom Exponenten n einen abelschen Körper.

Ist dagegen k *ein beliebiger Grundkörper* und H eine vorgeschriebene Divisorengruppe vom Exponenten n, so wird der Körper $\bar{k}$ der n-ten Einheitswurzeln zu Hilfe genommen, er gehöre zur Gruppe H'. Zur Gruppe $\overline{H}$ in $\bar{k}$, die aus denjenigen Divisoren besteht, deren Normen nach $H \frown H'$ fallen, und die wieder den Exponenten n besitzt, gibt es nach dem Bewiesenen einen abelschen Körper $\overline{K}/\bar{k}$. Daß sogar $\overline{K}/k$ abelsch ist, und zur Divisorengruppe $H \frown H'$ gehört, wird durch den Nachweis der Klassenkörpereigenschaft gezeigt. Die Konstruktion des abelschen Körpers $\overline{K}/k$ zur Gruppe $H \frown H'$ sichert dann auch *die Existenz eines abelschen Körpers zur gegebenen Divisorengruppe H vom Exponenten n.*

V. Der Existenzbeweis für den Exponenten p.

Unsere Überlegungen stützen sich auf folgenden

Hilfssatz [9]. *In einem Funktionenkörper k mit vollkommenem Konstantenkörper* Ω *der Charakteristik* $p \neq 0$ *darf aus dem Verschwinden eines Differentials* $d\alpha$ *geschlossen werden, daß* α *eine p-te Potenz ist.*

Beweis. Für konstantes α ist der Satz offenbar richtig. α sei also nunmehr keine Konstante. $k = \Omega(\alpha, \beta)$ werde durch die irreduzible Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ erzeugt. Wegen $d\alpha = 0$ ist $k/\Omega(\alpha)$ inseparabel, d. h. es ist $f(x, y) = g(x, y^p)$. Nun besteht zwischen $\alpha^{\frac{1}{p}}$ und β die irreduzible Gleichung $g^{\frac{1}{p}}\left(\alpha^{\frac{1}{p}}, \beta\right) = 0$. Werden in den Polynomen f und $g^{\frac{1}{p}}$ die Grade in β betrachtet, so ergibt sich

$$(\Omega(\alpha, \beta) : \Omega(\alpha)) = p \cdot \left(\Omega\left(\alpha^{\frac{1}{p}}, \beta\right) : \Omega\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right)\right) = \left(\Omega\left(\alpha^{\frac{1}{p}}, \beta\right) : \Omega(\alpha)\right).$$

Dies kann nur stattfinden, wenn $\alpha^{\frac{1}{p}}$ schon im Körper $k = \Omega(\alpha, \beta)$ liegt.

k sei fortan ein Funktionenkörper mit $q = p^f$ Konstanten und vom Geschlecht g.

[9]) Dieser Satz entstammt einer Göttinger Vorlesung (Winter 1933/34) von F. K. Schmidt.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$\mathfrak{m}$ ein genügend hoher Modul mit $N\mathfrak{m} > q^{2g-2}$,
α zu $\mathfrak{m}$ prime Zahlen,
$\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{m}$ prime Divisoren aller Grade,
$\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{m}$ prime Divisoren nullten Grades,
β_1 der Strahl mod $\mathfrak{m}$,
β_p der Strahl mod $\mathfrak{m}^p$.

Wir machen nun von unserem Hilfssatz eine Anwendung.

$\mathfrak{c}_i$ seien zu $\mathfrak{m}$ prime Repräsentanten aller Nichthauptklassen mit der Eigenschaft $\mathfrak{c}_i^p = (\gamma_i)$. Es ist $d\gamma_i \neq 0$, sonst wäre $\gamma_i = \delta_i^p$, $\mathfrak{c}_i^p = (\delta_i)^p$, $\mathfrak{c}_i = (\delta_i)$, gegen die Annahme. Indem wir $\mathfrak{m}$ gegebenenfalls noch vergrößern, erreichen wir, daß für alle endlich vielen i jedesmal $d\gamma_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^p}$ wird. Daraus folgt aber $\gamma_i \not\equiv \varepsilon\delta^p \pmod{\mathfrak{m}^p}$ oder $(\alpha\mathfrak{c}_i)^p \not\equiv (1) \pmod{\mathfrak{m}^p}$.

Dies bedeutet, $\mathfrak{b}^p \equiv (1) \pmod{\mathfrak{m}^p}$ kann nur für Hauptdivisoren $\mathfrak{b}$ zutreffen, oder in der Indizessprache ausgedrückt: $(\mathfrak{b} : \mathfrak{b}^p\beta_p) = ((\alpha) : (\alpha^p\beta_p))$. Da jede Einheit ε eine p-te Potenz ist, dürfen wir den letzten Index auch durch $(\alpha : \alpha^p\beta_p)$ ersetzen. Dieser Index gibt an, wie viele Restklassen mod $\mathfrak{m}^p$ der Kongruenz $\alpha^p \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}^p}$ oder der damit gleichwertigen Kongruenz $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ genügen. Hieraus ersehen wir

$$(\alpha : \alpha^p\beta_p) = (\beta_1 : \beta_p) = \varphi(\mathfrak{m}^p) : \varphi(\mathfrak{m}) = N\mathfrak{m}^{p-1}.$$

Wird noch beachtet, daß $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ eine unendliche zyklische Gruppe ist, so folgt das Ergebnis:

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^p\beta_p) = p \cdot (\mathfrak{b} : \mathfrak{b}^p\beta_p) = pN\mathfrak{m}^{p-1}.$$

Wir gehen jetzt zum additiven Teil des Existenzbeweises über; dabei bezeichnen wir mit

$\mathfrak{m}$ den vorhin gewählten Modul,
α (anders als vorhin!) alle Zahlen,
ω_1 solche Zahlen, für die $\omega_1\mathfrak{m}$ ganz ist,
ω_p solche Zahlen, für die $\omega_p\mathfrak{m}^p$ ganz ist.

Nun betrachten wir den größten abelschen Körper $K = k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)$ vom Exponenten p, dessen Führer noch in $\mathfrak{m}^p$ aufgeht. Er ist Klassenkörper zu einer Divisorengruppe H mod $\mathfrak{m}^p$ vom Index $(\omega : \wp\alpha)$. H enthält sicher die Gruppe $\mathfrak{a}^p\beta_p$ vom Index $pN\mathfrak{m}^{p-1}$.

Um zu zeigen, daß K *Klassenkörper zur Divisorengruppe* $\mathfrak{a}^p\beta_p$ ist, brauchen wir nur $(\omega : \wp\alpha) = pN\mathfrak{m}^{p-1}$ nachzuweisen.

Zur Untersuchung der additiven Gruppe der ω stellen wir die folgenden Betrachtungen an.

Für jede einzelne Zahl ω_p geht nach der arithmetischen Theorie der Führer des Körpers $k\left(\frac{\omega_p}{\wp}\right)$ in $\mathfrak{m}^p$ auf. Wir zeigen jetzt umgekehrt: Jede einzelne Zahl ω, für welche der Führer des Körpers $k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)$ in $\mathfrak{m}^p$ aufgeht, kann durch Subtraktion eines passenden $\wp\alpha$ in eine Zahl ω_p verwandelt werden.

Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft der Zahl ω ist der Divisorennenner von $\omega\mathfrak{m}^p$ eine p-te Potenz $(\mathfrak{p}^r\mathfrak{p}_1^{r_1}\ldots)^p$, $(r_i \geqq 0)$. Um diesen Nenner fortzuschaffen, gehen wir schrittweise vor.

Ist noch etwa $r > 0$, so ist wegen $\mathrm{N}\mathfrak{m} > q^{2g-2}$ nach dem Riemann-Rochschen Satz $q^{\{\mathfrak{m}\mathfrak{p}^r\}-\{\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{r-1}\}} = \mathrm{N}\mathfrak{p}$, daher gibt es eine solche Zahl α, daß zwar $\alpha\mathfrak{m}\mathfrak{p}^r$, aber nicht $\alpha\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{r-1}$ ganz ist, und daß die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von α einen beliebig vorgeschriebenen Anfangskoeffizienten hat. Wird bei passend gewähltem Koeffizienten $\omega' = \omega - \wp\alpha$ gesetzt, so hat $\omega'\mathfrak{m}^p$ höchstens den Nenner $(\mathfrak{p}^{r-1}\mathfrak{p}_1^{r_1}\ldots)^p$. Nach Fortsetzung dieser Reduktion können wir erreichen, daß $\omega'\mathfrak{m}^p$ keinen Nenner mehr hat, d. h. daß die Zahl ω' ein ω_p wird.

Für die ganze Gruppe ω ist damit $\omega = \omega_p + \wp\alpha$ nachgewiesen. Durch lokale Betrachtungen ist endlich $\omega_p \frown \wp\alpha = \wp\omega_1$ ersichtlich. Daher gilt

$$(\omega : \wp\alpha) = (\omega_p + \wp\alpha : \wp\alpha) = (\omega_p : \omega_p \frown \wp\alpha) = (\omega_p : \wp\omega_1).$$

Der Riemann-Rochsche Satz ermöglicht die Bestimmung der Gruppenordnungen

$$\begin{aligned} &q^{1-g}\,\mathrm{N}\mathfrak{m}^p && \text{für die Gruppe } \omega_p,\\ &q^{1-g}\,\mathrm{N}\mathfrak{m} && \text{für die Gruppe } \omega_1,\\ &\frac{1}{p}\,q^{1-g}\,\mathrm{N}\mathfrak{m} && \text{für die Gruppe } \wp\omega_1. \end{aligned}$$

Letzteres folgt daraus, daß bei Anwendung von $\wp$ genau die Zahlen des Primkörpers Null werden. Es wird somit

$$(\omega : \wp\alpha) = p\,\mathrm{N}\mathfrak{m}^{p-1};$$

dies aber wollten wir gerade nachweisen.

$\mathfrak{a}^p\beta_p$ ist die kleinste Divisorengruppe vom Exponenten p, die sich nach dem beliebigen (allerdings genügend hohen) Modul $\mathfrak{m}^p$ erklären läßt, und ihr ist ein abelscher Körper zugeordnet. Durch Zurückgehen auf die Unterkörper folgt dann der Satz:

Zu jeder vorgelegten Divisorengruppe vom Exponenten p gibt es einen abelschen Körper.

Nehmen wir an, der entsprechende Satz sei schon für den Exponenten p^{r-1} bewiesen, so können wir die Gültigkeit auch für p^r zeigen. Ist nämlich H eine im Körper k vorgelegte Divisorengruppe vom Exponenten p^r, so wird durch $H'^p \leqq H$ eine Obergruppe H' von H charakterisiert, die den Exponenten p^{r-1} hat. Nach der gemachten Annahme gehört zur Gruppe H' ein abelscher Körper $\bar{k}$. Zur Gruppe $\overline{H}$ in $\bar{k}$, die aus denjenigen Divisoren besteht, deren Normen nach H fallen, und die den Exponenten p besitzt, gibt es nach dem Bewiesenen einen abelschen Körper $\overline{K}/\bar{k}$. Daß sogar $\overline{K}/k$ abelsch ist und zur Divisorengruppe H gehört, wird durch den Nachweis der Klassenkörpereigenschaft gezeigt.

Schließlich können wir behaupten:

Existenzsatz. *Zu jeder vorgelegten Divisorengruppe H gibt es einen abelschen Körper K.*

Denn hat H den Exponenten $p^r n$, wobei $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ sei, so kann $H = H' \frown H''$ gesetzt werden, wobei H', H'' den Exponenten p^r bzw. n haben. Nach den bisherigen Untersuchungen gibt es zu diesen Gruppen abelsche Körper K' und K''. Ihr Kompositum $K = K'K''$ ist dann der gesuchte Körper, der zur vorgegebenen Gruppe H gehört.

Eingegangen 12. November 1934.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$\mathfrak{m}$ ein genügend hoher Modul mit $N\mathfrak{m} > q^{2g-2}$,
α zu $\mathfrak{m}$ prime Zahlen,
$\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{m}$ prime Divisoren aller Grade,
$\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{m}$ prime Divisoren nullten Grades,
β_1 der Strahl mod $\mathfrak{m}$,
β_p der Strahl mod $\mathfrak{m}^p$.

Wir machen nun von unserem Hilfssatz eine Anwendung.

$\mathfrak{c}_i$ seien zu $\mathfrak{m}$ prime Repräsentanten aller Nichthauptklassen mit der Eigenschaft $\mathfrak{c}_i^p = (\gamma_i)$. Es ist $d\gamma_i \neq 0$, sonst wäre $\gamma_i = \delta_i^p$, $\mathfrak{c}_i^p = (\delta_i)^p$, $\mathfrak{c}_i = (\delta_i)$, gegen die Annahme. Indem wir $\mathfrak{m}$ gegebenenfalls noch vergrößern, erreichen wir, daß für alle endlich vielen i jedesmal $d\gamma_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^p}$ wird. Daraus folgt aber $\gamma_i \not\equiv \varepsilon\delta^p \pmod{\mathfrak{m}^p}$ oder $(\alpha\mathfrak{c}_i)^p \not\equiv (1) \pmod{\mathfrak{m}^p}$.

Dies bedeutet, $\mathfrak{b}^p \equiv (1) \pmod{\mathfrak{m}^p}$ kann nur für Hauptdivisoren $\mathfrak{b}$ zutreffen, oder in der Indizessprache ausgedrückt: $(\mathfrak{b} : \mathfrak{b}^p\beta_p) = ((\alpha) : (\alpha^p\beta_p))$. Da jede Einheit ε eine p-te Potenz ist, dürfen wir den letzten Index auch durch $(\alpha : \alpha^p\beta_p)$ ersetzen. Dieser Index gibt an, wie viele Restklassen mod $\mathfrak{m}^p$ der Kongruenz $\alpha^p \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}^p}$ oder der damit gleichwertigen Kongruenz $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ genügen. Hieraus ersehen wir

$$(\alpha : \alpha^p\beta_p) = (\beta_1 : \beta_p) = \varphi(\mathfrak{m}^p) : \varphi(\mathfrak{m}) = N\mathfrak{m}^{p-1}.$$

Wird noch beachtet, daß $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ eine unendliche zyklische Gruppe ist, so folgt das Ergebnis:

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^p\beta_p) = p \cdot (\mathfrak{b} : \mathfrak{b}^p\beta_p) = pN\mathfrak{m}^{p-1}.$$

Wir gehen jetzt zum additiven Teil des Existenzbeweises über; dabei bezeichnen wir mit

$\mathfrak{m}$ den vorhin gewählten Modul,
α (anders als vorhin!) alle Zahlen,
ω_1 solche Zahlen, für die $\omega_1\mathfrak{m}$ ganz ist,
ω_p solche Zahlen, für die $\omega_p\mathfrak{m}^p$ ganz ist.

Nun betrachten wir den größten abelschen Körper $K = k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)$ vom Exponenten p, dessen Führer noch in $\mathfrak{m}^p$ aufgeht. Er ist Klassenkörper zu einer Divisorengruppe H mod $\mathfrak{m}^p$ vom Index $(\omega : \wp\alpha)$. H enthält sicher die Gruppe $\mathfrak{a}^p\beta_p$ vom Index $pN\mathfrak{m}^{p-1}$.

Um zu zeigen, daß K *Klassenkörper zur Divisorengruppe* $\mathfrak{a}^p\beta_p$ ist, brauchen wir nur $(\omega : \wp\alpha) = pN\mathfrak{m}^{p-1}$ nachzuweisen.

Zur Untersuchung der additiven Gruppe der ω stellen wir die folgenden Betrachtungen an.

Für jede einzelne Zahl ω_p geht nach der arithmetischen Theorie der Führer des Körpers $k\left(\frac{\omega_p}{\wp}\right)$ in $\mathfrak{m}^p$ auf. Wir zeigen jetzt umgekehrt: Jede einzelne Zahl ω, für welche der Führer des Körpers $k\left(\frac{\omega}{\wp}\right)$ in $\mathfrak{m}^p$ aufgeht, kann durch Subtraktion eines passenden $\wp\alpha$ in eine Zahl ω_p verwandelt werden.

Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft der Zahl ω ist der Divisorennenner von $\omega\mathfrak{m}^p$ eine p-te Potenz $(\mathfrak{p}^r\mathfrak{p}_1^{r_1}\ldots)^p$, $(r_i \geqq 0)$. Um diesen Nenner fortzuschaffen, gehen wir schrittweise vor.

Ist noch etwa $r > 0$, so ist wegen $\mathrm{N}\mathfrak{m} > q^{2g-2}$ nach dem Riemann-Rochschen Satz $q^{\{\mathfrak{m}\mathfrak{p}^r\}-\{\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{r-1}\}} = \mathrm{N}\mathfrak{p}$, daher gibt es eine solche Zahl α, daß zwar $\alpha\mathfrak{m}\mathfrak{p}^r$, aber nicht $\alpha\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{r-1}$ ganz ist, und daß die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von α einen beliebig vorgeschriebenen Anfangskoeffizienten hat. Wird bei passend gewähltem Koeffizienten $\omega' = \omega - \wp\alpha$ gesetzt, so hat $\omega'\mathfrak{m}^p$ höchstens den Nenner $(\mathfrak{p}^{r-1}\mathfrak{p}_1^{r_1}\ldots)^p$. Nach Fortsetzung dieser Reduktion können wir erreichen, daß $\omega'\mathfrak{m}^p$ keinen Nenner mehr hat, d. h. daß die Zahl ω' ein ω_p wird.

Für die ganze Gruppe ω ist damit $\omega = \omega_p + \wp\alpha$ nachgewiesen. Durch lokale Betrachtungen ist endlich $\omega_p \frown \wp\alpha = \wp\omega_1$ ersichtlich. Daher gilt

$$(\omega : \wp\alpha) = (\omega_p + \wp\alpha : \wp\alpha) = (\omega_p : \omega_p \frown \wp\alpha) = (\omega_p : \wp\omega_1).$$

Der Riemann-Rochsche Satz ermöglicht die Bestimmung der Gruppenordnungen

$$\begin{aligned} &q^{1-g}\,\mathrm{N}\mathfrak{m}^p && \text{für die Gruppe } \omega_p,\\ &q^{1-g}\,\mathrm{N}\mathfrak{m} && \text{für die Gruppe } \omega_1,\\ &\frac{1}{p}\,q^{1-g}\,\mathrm{N}\mathfrak{m} && \text{für die Gruppe } \wp\omega_1. \end{aligned}$$

Letzteres folgt daraus, daß bei Anwendung von $\wp$ genau die Zahlen des Primkörpers Null werden. Es wird somit

$$(\omega : \wp\alpha) = p\,\mathrm{N}\mathfrak{m}^{p-1};$$

dies aber wollten wir gerade nachweisen.

$\mathfrak{a}^p\beta_p$ ist die kleinste Divisorengruppe vom Exponenten p, die sich nach dem beliebigen (allerdings genügend hohen) Modul $\mathfrak{m}^p$ erklären läßt, und ihr ist ein abelscher Körper zugeordnet. Durch Zurückgehen auf die Unterkörper folgt dann der Satz:

Zu jeder vorgelegten Divisorengruppe vom Exponenten p gibt es einen abelschen Körper.

Nehmen wir an, der entsprechende Satz sei schon für den Exponenten p^{r-1} bewiesen, so können wir die Gültigkeit auch für p^r zeigen. Ist nämlich H eine im Körper k vorgelegte Divisorengruppe vom Exponenten p^r, so wird durch $H'^p \leqq H$ eine Obergruppe H' von H charakterisiert, die den Exponenten p^{r-1} hat. Nach der gemachten Annahme gehört zur Gruppe H' ein abelscher Körper $\bar{k}$. Zur Gruppe $\overline{H}$ in $\bar{k}$, die aus denjenigen Divisoren besteht, deren Normen nach H fallen, und die den Exponenten p besitzt, gibt es nach dem Bewiesenen einen abelschen Körper $\overline{K}/\bar{k}$. Daß sogar $\overline{K}/k$ abelsch ist und zur Divisorengruppe H gehört, wird durch den Nachweis der Klassenkörpereigenschaft gezeigt.

Schließlich können wir behaupten:

Existenzsatz. *Zu jeder vorgelegten Divisorengruppe H gibt es einen abelschen Körper K.*

Denn hat H den Exponenten $p^r n$, wobei $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ sei, so kann $H = H' \frown H''$ gesetzt werden, wobei H', H'' den Exponenten p^r bzw. n haben. Nach den bisherigen Untersuchungen gibt es zu diesen Gruppen abelsche Körper K' und K''. Ihr Kompositum $K = K'K''$ ist dann der gesuchte Körper, der zur vorgegebenen Gruppe H gehört.

Eingegangen 12. November 1934.

Die allgemeine Newtonsche Quadraturformel und Quadraturformeln für Stieltjesintegrale.

Von *Robert Schmidt* in Kiel.

In seinem unlängst erschienenen Buche [1]) hat Herr G. Kowalewski mit seinem Satze I, den er als das Kernstück der Theorie bezeichnet, eine wesentliche Lücke geschlossen. In der Tat wird das allgemeine Newtonsche Näherungsverfahren zur Auswertung bestimmter Integrale durch die von Herrn Kowalewski angegebene Integraldarstellung des Fehlergliedes erst zu einer wirklichen „Quadraturformel". — Zur Herleitung seines Hauptsatzes geht Kowalewski von der Taylorschen Formel aus, deren Restglied nach Integration und Umformung die Darstellung des Fehlergliedes liefert.

Im § 1 dieser Note gebe ich einen neuen Beweis des Kowalewskischen Hauptsatzes (in etwas verschärfter Form). Dabei mache ich nur von den Grundtatsachen über Integrale und ihre Ableitungen Gebrauch; insbesondere benutze ich die Taylorsche Formel nicht. — Die Erweiterung des Satzes auf Stieltjesintegrale wird im § 2 durchgeführt. Schließlich wende ich im § 3 die gleiche Methode zur Herleitung einer Quadraturformel für Stieltjesintegrale an, die insofern auf die besondere Natur der Stieltjesintegrale zugeschnitten ist, als sie bei Spezialisierung auf gewöhnliche Integrale gegenstandslos wird. Die zugehörigen Näherungsverfahren wurden hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit zu numerischen Zwecken von J. Hellerich und R. Schmidt untersucht [2]).

§ 1.

Zunächst soll der Satz, der die von Kowalewski als *allgemeine Newtonsche Quadraturformel* bezeichnete Gleichung zum Gegenstande hat, in der folgenden Form neu bewiesen werden:

Satz 1. *Es sei*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Es gibt dann genau ein System von Konstanten $L_0, L_1, \ldots, L_n$ *und genau eine in* $a \leqq x \leqq b$ *stetige Funktion* $N(x)$ *derart, daß*

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_0 f(a_0) + \cdots + L_n f(a_n) + \int_a^b N(x)\, f^{(n+1)}(x)\,dx$$

für alle in $a \leqq x \leqq b$ *mit R-integrierbaren* $(n+1)$*-ten Ableitungen versehenen Funktionen* $f(x)$ *erfüllt ist.*

---

[1]) G. Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur, Leipzig-Berlin 1932, S. 78.

[2]) J. Hellerich u. R. Schmidt, Numerische Auswertung von Stieltjesintegralen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **164** (1931), S. 243—255.

Wenn $\mathfrak{L}_0(x), \ldots, \mathfrak{L}_n(x)$ die Lagrangeschen Grundpolynome für die Stellen $a_0, \ldots, a_n$ sind, so ist

$$L_\nu = \int_a^b \mathfrak{L}_\nu(x)\, dx \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Die Funktion $N(x)$ setzt sich stückweise aus Polynomen $(n+1)$-ten Grades zusammen, und zwar ist

$$N(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \sum_{a_\nu > x} L_\nu (a_\nu - x)^n.$$

Daß $L_0, \ldots, L_n$ notwendig die Lagrangeschen Konstanten sein müssen, wird sofort klar, wenn man für $f(x)$ der Reihe nach die Lagrangeschen Grundpolynome einsetzt. Der Beweis für die Eindeutigkeit — und zugleich die Herleitung der expliziten Darstellung — der stetigen Funktion $N(x)$ kann auf einen Hilfssatz gestützt werden, dessen Richtigkeit auf der Hand liegt.

Hilfssatz. *Die Funktionen $g(t)$; $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_\lambda(t), \ldots$ seien in $a \leqq t \leqq b$ definiert und dort R-integrierbar, und es strebe*

$$\int_a^b |g_\lambda(t) - g(t)|\, dt \to 0$$

mit $\lambda \to \infty$. Für jede stetige Funktion $h(t)$ strebt dann

$$\int_a^b h(t)\, g_\lambda(t)\, dt \to \int_a^b h(t)\, g(t)\, dt.$$

Bildet man

$$\varphi(t) = \int_a^t \overset{(m)}{\cdots} \int_a^t g(t)\, dt \quad \text{und} \quad \varphi_\lambda(t) = \int_a^t \overset{(m)}{\cdots} \int_a^t g_\lambda(t)\, dt \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

so strebt in $a \leqq t \leqq b$ gleichmäßig

$$\varphi_\lambda(t) \to \varphi(t)$$

mit $\lambda \to \infty$. — Wenn die Funktionen $g_\lambda(t)$ außerdem als stetig vorausgesetzt werden, so ist

$$\varphi_\lambda^{(m)}(t) = g_\lambda(t) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

und es strebt

$$\int_a^b h(t)\, \varphi_\lambda^{(m)}(t)\, dt \to \int_a^b h(t)\, g(t)\, dt.$$

Der Index ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ werde vorläufig festgehalten, ebenso eine Stelle x aus $a_{\nu-1} < x < a_\nu$, und eine Funktion $g(t)$ sei durch

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in $a \leqq t \leqq b$ erklärt. Die Funktionen $g_\lambda(t)$ lassen sich dann so wählen, daß alle Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt sind. Mit $m = n + 1$ seien $\varphi_\lambda(t)$ die Funktionen, die im Sinne des Hilfssatzes zu den $g_\lambda(t)$ gehören. Als notwendige Bedingungen für $N(t)$ erhält man, wenn man insbesondere $f(t) = \varphi_\lambda(t)$ setzt,

$$\int_a^b \varphi_\lambda(t)\, dt = L_0 \varphi_\lambda(a_0) + \cdots + L_n \varphi_\lambda(a_n) + \int_a^b N(t)\, \varphi_\lambda^{(n+1)}(t)\, dt \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

aus denen mit $\lambda \to \infty$ durch Anwendung des Hilfssatzes sofort folgt:

$$(1) \qquad \int_a^b \varphi(t)\,dt = L_0\varphi(a_0) + \cdots + L_n\varphi(a_n) + \int_a^b N(t)\,g(t)\,dt$$

oder

$$(1') \qquad -\int_x^b N(t)\,dt = -\int_a^b \varphi(t)\,dt + L_0\varphi(a_0) + \cdots + L_n\varphi(a_n).$$

Zur Berechnung von $\varphi(t)$ hat man allgemein

$$(2) \qquad \int_a^t \overset{(m)}{\cdots} \int_a^t g(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } a \leqq t \leqq x \\ \dfrac{(t-x)^m}{m!} & \text{für } x \leqq t \leqq b \end{cases}$$

und daraus insbesondere

$$(3) \qquad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \leqq t \leqq x \\ \dfrac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} & \text{für } x \leqq t \leqq b. \end{cases}$$

Es wird demnach

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \frac{(b-x)^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$\varphi(a_0) = 0, \ldots, \varphi(a_{\nu-1}) = 0; \qquad \varphi(a_\nu) = \frac{(a_\nu - x)^{n+1}}{(n+1)!}, \ldots, \varphi(a_n) = \frac{(a_n - x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

und durch Einsetzen in (1) und Differentiation:

$$N(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\{L_\nu(a_\nu - x)^n + \cdots + L_n(a_n - x)^n\}$$

in $a_{\nu-1} < x < a_\nu$. Das gilt für jedes $\nu = 1, \ldots, n$, und wegen der für $N(x)$ geforderten, bei den Ausdrücken rechts tatsächlich vorhandenen Stetigkeit an den Stellen $a_0, \ldots, a_n$ ist auch für diese Stellen:

$$N(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\sum_{a_\nu > x} L_\nu(a_\nu - x)^n.$$

Wählt man die Konstanten $L_0, \ldots, L_n$ und die Funktion $N(x)$ so, wie es sich soeben als notwendig herausgestellt hat, dann ist den oben durchlaufenen Schlüssen zu entnehmen: *Jede Funktion $g(t)$ der obigen Form verwirklicht zusammen mit der zu ihr gehörigen Funktion $\varphi(t)$ die Gleichung* (1). Diese Bemerkung liefert den Ansatz, um umgekehrt zu zeigen, daß jene Konstanten $L_0, \ldots, L_n$ und jene Funktion $N(x)$ wirklich das im Satze 1 Verlangte leisten. In der Tat: Wenn $G_1(t), \ldots, G_k(t)$ irgendwelche integrierbaren Funktionen sind, die zusammen mit ihren zugehörigen Funktionen

$$\Phi_\varkappa(t) = \int_a^t \overset{(n+1)}{\cdots} \int_a^t G_\varkappa(t)\,dt \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

die Gleichung (1) verwirklichen, also

$$\int_a^b \Phi_\varkappa(t)\,dt = L_0\Phi_\varkappa(a_0) + \cdots + L_n\Phi_\varkappa(a_n) + \int_a^b N(t)\,G_\varkappa(t)\,dt$$

ist, so trifft das gleiche für jede Linearverbindung

$$G(t) = c_1 G_1(t) + \cdots + c_k G_k(t)$$

zusammen mit

$$\Phi(t) = \int_a^{t^{(n+1)}} \cdots \int_a^t G(t)\, dt$$

zu:

$$(1^*) \qquad \int_a^b \Phi(t)\, dt = L_0\Phi(a_0) + \cdots + L_n\Phi(a_n) + \int_a^b N(t)\, G(t)\, dt.$$

Nimmt man nun zwei beliebige Stellen x' und x'' aus $a_{\nu-1} < x' < x'' < a_\nu$, so folgt aus dieser Feststellung und der obigen Bemerkung, daß (1*) mit

$$G(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x' < t < x'' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwirklicht wird. Ferner überzeugt man sich davon, daß für eine beliebige Stelle x''' aus $a_{\nu-1} < x''' < a_\nu$ die Gleichung (1) auch mit

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad a < t < x''' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt ist; dazu braucht man in (2) und (3) nur x und b durch a und x zu ersetzen, in (1′) einzusetzen und zu differenzieren. Damit ist erreicht: Wenn

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

eine beliebige Intervallteilung ist, bei der die Stellen $a, \ldots, a_{n-1}$ vorkommen,

$$G_\varkappa(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x_{\varkappa-1} < t < x_\varkappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

gesetzt wird und $c_1, \ldots, c_k$ irgendwelche Konstanten sind, so ist (1*) für

$$G(t) = c_1 G_1(t) + \cdots + c_k G_k(t)$$

erfüllt. Wenn jetzt $f(t)$ eine beliebige, mit R-integrierbarer $(n+1)$-ter Ableitung versehene Funktion ist, so kann man $f^{(n+1)}(t)$ durch eine Folge von solchen Funktionen $G(t)$, etwa $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$, . . ., so approximieren, daß

$$\int_a^b |f^{(n+1)}(t) - \Gamma_\lambda(t)|\, dt \to 0$$

strebt mit $\lambda \to \infty$. Die zugehörigen Funktionen $\Phi(t)$ seien $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, ... Durch eine erneute Anwendung des Hilfssatzes mit

$$g(t) = f^{(n+1)}(t), \quad g_\lambda(t) = \Gamma_\lambda(t), \quad \varphi_\lambda(t) = \Psi_\lambda(t), \quad h(t) = N(t)$$

werden dann die bisher erzielten Gleichungen

$$\int_a^b \Psi_\lambda(t)\, dt = L_0\Psi_\lambda(a_0) + \cdots + L_n\Psi_\lambda(a_n) + \int_a^b N(t)\, \Gamma_\lambda(t)\, dt$$

übergeführt in

$$\int_a^b \Psi(t)\, dt = L_0\Psi(a_0) + \cdots + L_n\Psi(a_n) + \int_a^b N(t)\, f^{(n+1)}(t)\, dt$$

mit

$$\Psi(t) = \int_a^{t^{(n+1)}} \cdots \int_a^t f^{(n+1)}(t)\, dt = f(t) + P(t),$$

wo $P(t)$ ein Polynom n-ten Grades ist; man erhält also:

$$\int_a^b \{f(t) + P(t)\}\, dt = L_0\{f(a_0) + P(a_0)\} + \cdots + L_n\{f(a_n) + P(a_n)\} + \int_a^b N(t)\, f^{(n+1)}(t)\, dt,$$

woraus wegen

$$P(x) = \mathfrak{L}_0(x)\, P(a_0) + \cdots + \mathfrak{L}_n(x)\, P(a_n)$$

die Quadraturformel des Satzes 1 abzulesen ist.

Im Hinblick auf die Quadraturformeln für Stieltjesintegrale ist es bemerkenswert, daß die Funktion $N(x)$ nicht bloß stetig ist, sondern auch im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ mit stetiger $(n-1)$-ter Ableitung versehen ist [3]), und zwar kann der Ausdruck

$$S(x) = \frac{1}{n!} \sum_{a_\nu > x} L_\nu (a_\nu - x)^n$$

bei der Differentiation bis zur $(n-1)$-ten Ordnung so behandelt werden, *als ob er ein einheitliches Polynom wäre*:

$$S^{(r)}(x) = \frac{(-1)^r}{(n-r)!} \sum_{a_\nu > x} L_\nu (a_\nu - x)^{n-r} \qquad (r = 1, \ldots, n-1).$$

Man braucht sich also bei der Differentiation bis zur $(n-1)$-ten Ordnung nicht darum zu bekümmern, daß nur über $a_\nu > x$ zu summieren ist.

§ 2.

Satz 2. *Es sei*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

und $\chi(x)$ *eine in* $a \leqq x \leqq b$ *monoton wachsende Funktion*:

$$\chi(x') \leqq \chi(x'') \quad \text{für} \quad x' < x''.$$

Es gibt dann genau ein System von Konstanten $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n$ *und genau eine in* $a \leqq x \leqq b$ *stetige Funktion* $\mathsf{N}(x)$ *derart, daß*

$$\int_a^b f(x)\, d\chi(x) = \Lambda_0 f(a_0) + \cdots + \Lambda_n f(a_n) + \int_a^b \mathsf{N}(x)\, f^{(n+1)}(x)\, dx$$

für alle in $a \leqq x \leqq b$ *mit R-integrierbaren* $(n+1)$*-ten Ableitungen versehenen Funktionen* $f(x)$ *erfüllt ist.*

Die Konstanten $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n$ *sind die verallgemeinerten Lagrangeschen Konstanten*

$$\Lambda_\nu = \int_a^b \mathfrak{L}_\nu(x)\, d\chi(x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

und es ist

$$\mathsf{N}(x) = \frac{1}{n!} \int_x^b (t-x)^n\, d\chi(t) - \frac{1}{n!} \sum_{a_\nu > x} \Lambda_\nu (a_\nu - x)^n.$$

Zum Beweise kann man die Funktionen $g(t)$, $g_\lambda(t)$, $\varphi(t)$, $\varphi_\lambda(t)$ aus dem Beweise des Satzes 1 unverändert benutzen. Damit wird

$$\int_a^b \varphi(t)\, d\chi(t) = \int_x^b \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\, d\chi(t).$$

Hier greift nun die Bemerkung Platz, daß die Funktion

$$I(x) = \frac{1}{m!} \int_x^b (t-x)^m\, d\chi(t)$$

---

[3]) Hierzu vergleiche man: G. Kowalewski, Über die Gaußsche Integralapproximation, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse, **86** (1934), S. 189—198, besonders S. 197.

für $m > 1$ trotz der zugelassenen Unstetigkeit von $\chi(t)$ nicht bloß im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig ist, sondern *dort sogar eine stetige* $(m-1)$*-te Ableitung besitzt*, und zwar ist

$$I^{(r)}(x) = \frac{(-1)^r}{(m-r)!} \int_x (t-x)^{m-r}\, d\chi(t) \qquad (r = 1, \ldots, m-1),$$

d. h. man kann $I(x)$ bei der Differentiation bis zur $(m-1)$-ten Ordnung so behandeln, als ob die untere Integrationsgrenze konstant wäre. Die Richtigkeit dieser Bemerkung wird sofort klar, wenn man den Differenzenquotienten

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \frac{1}{m!} \int_{x+h}^{b} \frac{\{t-(x+h)\}^m - (t-x)^m}{h}\, d\chi(t) - \frac{1}{m!} \int_x^{x+h} \frac{(t-x)^m}{h}\, d\chi(t)$$

ansetzt und beachtet, daß $(t-x)^m$ in $a \leqq t \leqq b$ gleichmäßig nach x differenzierbar ist und daß

$$\left| \frac{(t-x)^m}{h} \right| \leqq |h|^{m-1}$$

auf dem in Betracht kommenden Integrationswege erfüllt ist. — Bei stetiger Belegungsfunktion $\chi(t)$ würde $I(x)$ offenbar auch noch für $m = 1$ differenzierbar sein.

Als notwendige Bedingung für $\mathsf{N}(x)$ erhält man somit

$$\mathsf{N}(x) = \frac{1}{n!} \int_x^b (t-x)^n\, d\chi(t) - \frac{1}{n!} \sum_{a_\nu > x} \Lambda_\nu (a_\nu - x)^n,$$

zunächst mit Ausnahme der Stellen $a_0, \ldots, a_n$, dann aber auch — unter Berufung auf die Stetigkeit des Integrals und der Summe rechts — für diese Stellen.

Der Beweis dafür, daß $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n$ und $\mathsf{N}(x)$ zusammen wirklich das Verlangte leisten, ist wörtlich aus dem entsprechenden Beweise des § 1 zu übernehmen.

Ebenso wie die Funktion $N(x)$ des Satzes 1 ist auch die Funktion $\mathsf{N}(x)$ nicht bloß im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig, sondern dort mit stetiger $(n-1)$-ter Ableitung versehen.

§ 3.

Satz 3. *Es sei*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

und $\chi(x)$ *eine in* $a \leqq x \leqq b$ *monoton wachsende Funktion.*

Es gibt dann genau ein System von Konstanten $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n;\ \mathsf{B}_1, , \ldots, \mathsf{B}_n$ *und genau eine in* $a \leqq x \leqq b$ *stetige Funktion* $\mathsf{M}(x)$ *derart, daß*

$$\int_a^b f(x)\, d\chi(x) = \mathsf{A}_0 f(a_0) + \cdots + \mathsf{A}_n f(a_n) + \mathsf{B}_0 \int_{a_0}^{a_1} f(x)\, dx + \cdots + \mathsf{B}_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\, dx + \int_a^b \mathsf{M}(x)\, f^{(2n+1)}(x)\, dx$$

für alle in $a \leqq x \leqq b$ *mit R-integrierbaren* $(2n+1)$*-ten Ableitungen versehenen Funktionen* $f(x)$ *erfüllt ist.*

Die Konstanten $\mathsf{A}_0, \ldots, \mathsf{A}_n; \mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n$ *lassen sich in der Form*

$$\mathsf{A}_\mu = \int_a^b \mathfrak{P}_\mu(x)\, d\chi(x) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n)$$

$$\mathsf{B}_\varrho = \int_a^b \mathfrak{Q}_\varrho(x)\, d\chi(x) \qquad (\varrho = 1, \ldots, n)$$

darstellen, wo $\mathfrak{P}_\mu(x)$ *und* $\mathfrak{Q}_\varrho(x)$ *die durch die Gleichungen* (4) *erklärten Polynome* $2n$*-ten Grades sind, und es ist* (*mit* $\mathsf{B}_{n+1} = 0$)

$$\mathsf{M}(x) = \frac{1}{(2n)!}\int_x^b (t-x)^{2n}\, d\chi(t) - \frac{1}{(2n)!}\sum_{a_\nu > x}\left\{\mathsf{A}_\nu + \frac{\mathsf{B}_\nu - \mathsf{B}_{\nu+1}}{2n+1}(a_\nu - x)\right\}(a_\nu - x)^{2n}.$$

Die Eindeutigkeit der $2n+1$ Konstanten $\mathsf{A}_0, \ldots, \mathsf{B}_n$ kann man dadurch zeigen, daß man der Reihe nach

$$f(x) = 1, 2x, \quad 3x^2, \ldots, (2n+1)\, x^{2n}$$

setzt. Man erhält $2n+1$ lineare Gleichungen mit der Koeffizientenmatrix

$$\left\langle \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_1 - a_0 & a_2 - a_1 \cdots a_n - a_{n-1} \\ 2a_0 & 2a_1 & \cdots & 2a_n & a_1^2 - a_0^2 & a_2^2 - a_1^2 \cdots a_n^2 - a_{n-1}^2 \\ 3a_0^2 & 3a_1^2 & \cdots & 3a_n^2 & a_1^3 - a_0^3 & a_2^3 - a_1^3 \cdots a_n^3 - a_{n-1}^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2n+1)\, a_0^{2n} & \cdots & (2n+1)\, a_n^{2n} & a_1^{2n+1} - a_0^{2n+1} & \cdots & a_n^{2n+1} - a_{n-1}^{2n+1} \end{array} \right\rangle.$$

Das Nichtverschwinden der Determinante D dieser Matrix ist bekannt [4]), und zwar ist

$$D = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1!\,2!\ldots n!)^4}\prod_{\mu>\nu}(a_\mu - a_\nu)^4.$$

Man kann auch so vorgehen, daß man Polynome $\mathfrak{P}_0(x), \ldots, \mathfrak{P}_n(x)$ und $\mathfrak{Q}_1(x), \ldots, \mathfrak{Q}_n(x)$ vom $2n$-ten Grade mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{P}_\mu(a_\nu) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{a_\nu - 1}^{a_\nu} \mathfrak{P}_\mu(x)\, dx = 0 \quad \text{stets} \qquad (\mu = 0, \ldots, n)$$

$$\mathfrak{Q}_\varrho(a_\nu) = 0 \quad \text{stets}$$

$$\int_{a_\nu - 1}^{a_\nu} \mathfrak{Q}_\nu(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \varrho = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\varrho = 1, \ldots, n)$$

bestimmt. Die Existenz und — hier nicht benötigte — Eindeutigkeit dieser Polynome kann man wieder mit Hilfe des Nichtverschwindens der Determinante D nachweisen, und ihre Koeffizienten aus einem linearen Gleichungssystem berechnen. Die Eindeutigkeit der Konstanten $\mathsf{A}_0, \ldots, \mathsf{B}_n$ und die im Satze 3 behauptete Darstellung folgt unmittelbar durch Einsetzen der Polynome $\mathfrak{P}_\mu(x)$ und $\mathfrak{Q}_\varrho(x)$ für $f(x)$. — Nach Art der Lagrangeschen Polynome lassen sich die Polynome $\mathfrak{P}_\mu(x)$ und $\mathfrak{Q}_\varrho(x)$ direkt angeben. Setzt man

$$P_\mu(x) = \frac{x-a}{\prod\limits_{\nu \neq \mu}(a_\mu - a_\nu)^2}\prod_{\nu \neq \mu}(x - a_\nu)^2,$$

$$Q_\varrho(x) = \mathfrak{L}_\varrho(x) + \cdots + \mathfrak{L}_n(x),$$

---

[4]) J. Hellerich-R. Schmidt, l. c., § 6.

so ist

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{P}_\mu(x) &= P'_\mu(x), \\ \mathfrak{Q}_\varrho(x) &= Q'_\varrho(x) - \{Q'_\varrho(a_0)\,\mathfrak{P}_0(x) + \cdots + Q'_\varrho(a_n)\,\mathfrak{P}_n(x)\}. \end{aligned}$$

Für alle Polynome $P(x)$ vom $2n$-ten Grade gilt die Identität

$$P(x) = \mathfrak{P}_0(x)\,P(a_0) + \mathfrak{P}_1(x)\,P(a_1) + \cdots + \mathfrak{P}_n(x)\,P(a_n) + \mathfrak{Q}_1(x)\int_{a_0}^{a_1} P(t)\,dt + \cdots + \mathfrak{Q}_n(x)\int_{a_{n-1}}^{a_n} P(t)\,dt.$$

Zur Herleitung einer Bedingung, der $\mathsf{M}(x)$ notwendig genügen muß, kann wieder die Funktion $g(t)$ des § 1 benutzt werden, aber jetzt ist

$$\varphi(t) = \int_a^t \overset{(2n+1)}{\cdots} \int_a^t g(t)\,dt$$

zu wählen, also

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a \leqq t \leqq x \\ \dfrac{(t-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} & \text{für} \quad x \leqq t \leqq b. \end{cases}$$

Es wird

$$\int_a^b \varphi(t)\,d\chi(t) = \int_x^b \frac{(t-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,d\chi(t);$$

$$\varphi(a_\mu) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 0, \ldots, \nu-1 \\ \dfrac{(a_\mu - x)^{2n+1}}{(2n+1)!} & \text{für} \quad \mu = \nu, \ldots, n; \end{cases}$$

$$\int_{a_{\varrho-1}}^{a_\varrho} \varphi(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \varrho = 1, \ldots, \nu-1 \\ \dfrac{(a_\nu - x)^{2n+2}}{(2n+2)!} & \text{für} \quad \varrho = \nu \\ \dfrac{(a_\varrho - x)^{2n+2}}{(2n+2)!} - \dfrac{(a_{\varrho-1} - x)^{2n+2}}{(2n+2)!} & \text{für} \quad \varrho = \nu+1, \ldots, n; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(x) = {} & \frac{1}{(2n)!}\int_x^b (t-x)^{2n}\,d\chi(t) - \frac{1}{(2n)!}\{\mathsf{A}_\nu(a_\nu - x)^{2n} + \cdots + \mathsf{A}_n(a_n - x)^{2n}\} \\ & - \frac{1}{(2n+1)!}[\mathsf{B}_\nu(a_\nu - x)^{2n+1} + \{\mathsf{B}_{\nu+1}(a_{\nu+1} - x)^{2n+1} - \mathsf{B}_\nu(a_\nu - x)^{2n+1}\} \\ & + \cdots + \{\mathsf{B}_n(a_n - x)^{2n+1} - \mathsf{B}_{n-1}(a_{n-1} - x)^{2n+1}\}]. \end{aligned}$$

Durch Umformung und Ausdehnung auf die Stellen $a_0, \ldots, a_n$ folgt daraus die im Satze 3 angegebene Darstellung für $\mathsf{M}(x)$. — Der Existenzbeweis für $\mathsf{M}(x)$ ist wieder wörtlich aus dem § 1 zu übernehmen.

Man überzeugt sich schließlich noch davon, daß $\mathsf{M}(x)$ im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ eine stetige $(2n-1)$-te Ableitung besitzt.

Eingegangen 2. Dezember 1934.

Die Teilwerte der Weberschen Tau-Funktion.

Von *Wolfgang Franz* in Marburg.

Alle über einem imaginär quadratischen Zahlkörper Ω abelschen Körper lassen sich bekanntlich durch singuläre Werte der Modulfunktion $j(\omega_1, \omega_2)$ aus der Theorie der elliptischen Funktionen und der Weberschen Funktion $\tau(u \mid \omega_1, \omega_2)$, d. i. im wesentlichen, bis auf einen Dimensionsfaktor, die Weierstraßsche $\wp$-Funktion, erzeugen; das heißt, alle abelschen Körper über Ω sind in solchen Körpern enthalten, die sich durch Adjunktion von geeigneten Funktionswerten von j und τ mit Argumenten ω_1, ω_2, u aus Ω ergeben. Im folgenden werden umgekehrt die sämtlichen Funktionswerte dieser Art betrachtet. Bereits Weber hat sämtliche $j(\omega_1, \omega_2)$ untersucht: Alle diese Zahlen sind abelsch über Ω; sie liefern Ringklassenkörper, die im Sinne der Klassenkörpertheorie zu solchen Ringen in Ω gehören, die sich aus ω_1, ω_2 ohne weiteres ablesen lassen. Hier soll analog der arithmetische Charakter sämtlicher Teilwerte der τ-Funktion, $\tau(u \mid \omega_1, \omega_2)$ mit beliebigen u, ω_1, ω_2 aus Ω, untersucht werden. Auch diese Zahlen sind abelsch über Ω. Die zugehörigen Gruppen in Ω werden in ihrer Abhängigkeit von u, ω_1, ω_2 bestimmt. Dabei wird allerdings mit $\tau(u \mid \omega_1, \omega_2)$ stets gleichzeitig $j(\omega_1, \omega_2)$ adjungiert. Man kann zwar bei der Erzeugung jedes Strahlklassenkörpers und damit jedes abelschen Körpers über Ω die j-Funktion dadurch vermeiden, daß man geeignet viele Teilwerte der τ-Funktion adjungiert; die Frage aber, welche Körper durch die einzelnen $\tau(u \mid \omega_1, \omega_2)$ allein über Ω erzeugt werden, ist bisher noch nicht beantwortet. Die Darstellung schließt sich an den Hasseschen Aufbau der Theorie der komplexen Multiplikation [1]) an.

k sei eine natürliche Zahl, Ω_k bezeichne den Zahlring mod k, das ist die Menge derjenigen für k ganzen Zahlen aus Ω, die mod k in rationalen Restklassen liegen. Ist $(1, \omega)$ eine Basis der ganzen Zahlen von Ω, so besteht Ω_k aus allen $x + yk\omega$ mit für k ganzen rationalen x, y. Jeder Zahl α aus Ω kommt bezüglich der additiven Gruppe Ω_k ein endlicher Index j zu, denn offenbar liegt $k^n\alpha$ mit geeignetem natürlichen n stets in Ω_k; j ist demnach nur aus Primzahlen von k zusammengesetzt. Bei ganzen, allgemeiner bei für k ganzen α liegt schon $k\alpha$ in Ω_k, j ist also Teiler von k. — Ω_k^* sei die Menge der zu k primen Zahlen von Ω_k; Ω_k^* ist eine multiplikative Gruppe. Ist j der Index von α bezüglich Ω_k und λ eine beliebige Zahl aus Ω_k^*, so liegt auch $j\lambda\alpha$ in Ω_k, der Index von $\lambda\alpha$ ist also höchstens j; da auch λ^{-1} in Ω_k^*, ist der Index von $\lambda\alpha$ genau gleich j. Multiplikation mit Zahlen aus Ω_k^* ändert also den Index j nicht. Die durch die Zahlen von Ω_k^* erzeugten Hauptideale bilden die Idealgruppe R_k, die Hauptringklassengruppe mod k, eine mod k erklärte Kongruenzidealgruppe. Die Restklassen nach R_k in der Gruppe aller zu k primen Ideale sind die Ringklassen mod k, die zugehörige Faktorgruppe

[1]) H. Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation, Journ. f. reine u. angew. Math., 1. Teil: **157** (1927), 2. Teil: **165** (1931).

ist die Ringklassengruppe mod k. Wenn Ω nicht der Körper $\mathsf{P}(i)$ der vierten, bzw. $\mathsf{P}(\eta)$ der sechsten Einheitswurzeln ist, so liegen die einzigen Einheiten ± 1 von Ω in jedem Ω_k^*, die Zahlen von Ω_k^* sind also die einzigen Erzeugenden für die Hauptideale von R_k. Wenn dagegen $\Omega = \mathsf{P}(i)$ bzw. $\Omega = \mathsf{P}(\eta)$ ist, so liegen für $k > 1$ die Einheiten $\pm i$ bzw. $\pm \eta$, $\pm \eta^2$ nicht in Ω_k^*, und es gibt demgemäß für jedes Ideal aus R_k außer den beiden Erzeugenden $\pm \lambda$ in Ω_k^* noch die weiteren Erzeugenden $\pm i\lambda$ bzw. $\pm \eta\lambda$, $\pm \eta^2\lambda$ außerhalb Ω_k^*.

Wir betrachten die Funktion [2])

$$\tau(u \mid \omega_1, \omega_2) = -\, 2^7 3^5 \frac{g_2(\omega_1, \omega_2)\, g_3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}\, \wp(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

Es sei $\tau_0 = \tau(\varrho \mid \beta_1, \beta_2)$ ein singulärer Wert, d. h. ein mit Argumenten $\varrho, \beta_1, \beta_2$ aus Ω gebildeter (endlicher) Funktionswert, der im folgenden festgehalten wird. Dann sind β_1, β_2 reell-linear-unabhängig, also sicher über P linear unabhängig, ϱ gestattet also eine Darstellung $\varrho = r_1\beta_1 + r_2\beta_2$ mit rationalen r_1, r_2 und ist demnach ein rationaler Teilpunkt des durch β_1, β_2 in der komplexen Ebene aufgespannten Gitters. Umgekehrt ist natürlich auch jeder rationale Teilpunkt eines durch Zahlen aus Ω aufgespannten Gitters eine Zahl aus Ω. — Ist der größte gemeinsame Teiler $(\beta_1, \beta_2) = \mathfrak{b}$, so wird

$$\Delta(\beta_1, \beta_2) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{vmatrix}^2 = k^2\, N(\mathfrak{b})\, d\,,$$

wobei d die Diskriminante von Ω und k eine natürliche Zahl ist. Dann gibt es bekanntlich einen Faktor μ in Ω derart, daß $\mu(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_{01}, \alpha_{02})$ Basis in Ω_k des zu k primen Ideals $\mu\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_0$ wird, d. h. daß alle und nur die zu Ω_k gehörigen Zahlen von $\mathfrak{a}_0$ in der Form $x_1\alpha_{01} + x_2\alpha_{02}$ mit ganz-rationalen x_1, x_2 darstellbar sind. Setzt man $\varrho_0 = \mu\varrho$, so ist wegen der Homogenität der τ-Funktion

$$\tau_0 = \tau(\varrho \mid \beta_1, \beta_2) = \tau(\mu\varrho \mid \mu\beta_1, \mu\beta_2) = \tau(\varrho_0 \mid \alpha_{01}, \alpha_{02})\,.$$

Wir brauchen also nur Teilwerte dieser Form zu behandeln. Wir können ferner für $\Omega = \mathsf{P}(i)$ und $\Omega = \mathsf{P}(\eta)$ den Fall $k = 1$ ausschließen, da dann die τ-Funktion identisch Null ist.

Wir spalten nun von ϱ_0 den Faktor $\mathfrak{a}_0$ ab, stellen den Rest als reduzierten Quotienten ganzer Ideale dar und zerlegen den Zähler in den zu k primen Bestandteil $\mathfrak{r}_0$ und den nur aus Primteilern von k zusammengesetzten $\mathfrak{k}$, so daß

$$(\varrho_0) = \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{a}_0\,.$$

Wir ordnen dann in Bezug auf τ_0 jedem ganzen zu $\mathfrak{m}k$ primen Ideal $\mathfrak{r}$ in folgender Weise einen Funktionswert $\tau(\mathfrak{r})$ zu: $\mathfrak{a}$ sei so gewählt, daß $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}_0\mathfrak{a}_0}$ in die Hauptringklasse fällt, $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}_0\mathfrak{a}_0} = (\lambda)$ mit λ aus Ω_k^*. Dann sei $\varrho = \lambda\varrho_0$, also $(\varrho) = \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}{\mathfrak{m}}\mathfrak{a}$, und

$$\tau(\mathfrak{r}) = \tau(\varrho \mid \mathfrak{a}^{(k)})\,,$$

wo $\mathfrak{a}^{(k)} = (\alpha_1, \alpha_2)$ eine beliebige Basis in Ω_k von $\mathfrak{a}$ bezeichnet. $\tau(\mathfrak{r})$ ist unabhängig 1. von der Wahl der Erzeugenden λ in Ω_k^* für $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}_0\mathfrak{a}_0}$, da $-\lambda$ denselben Funktionswert

[2]) Diese Funktion ist von der von Weber betrachteten nur um einen rationalen Zahlfaktor verschieden; vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra III, 2. Auflage, Braunschweig 1908, S. 572, ferner Hasse, a. a. O. 1. Teil, S. 127. Da $g_3(i, 1) = g_2(\eta, 1) = 0$, benutzen Hasse und Weber zur Erzeugung der Strahlklassenkörper über $\mathsf{P}(i)$ und $\mathsf{P}(\eta)$ modifizierte τ-Funktionen, die hier außer Betracht bleiben können.

ergibt, 2. von der Wahl der Basis $\mathfrak{a}^{(k)}$ in Ω_k von $\mathfrak{a}$, da sämtliche Basen durch Modulsubstitutionen zusammenhängen und bei solchen die τ-Funktion invariant ist, 3. von der Auswahl von $\mathfrak{a}$ in seiner Ringklasse: Wählt man an Stelle von $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{a}(\lambda')$ mit λ' in Ω_k^*, so ist $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}(\lambda')}{\mathfrak{r}_0\mathfrak{a}_0} = (\lambda\lambda')$ und $\lambda\lambda'$ in Ω_k^*, man hat also $\varrho_0\lambda\lambda' = \varrho\lambda'$ an Stelle von ϱ zu setzen; da andrerseits $(\alpha_1\lambda', \alpha_2\lambda')$ Basis in Ω_k von $\mathfrak{a}\lambda'$ ist, ergibt sich wegen der Homogenität der τ-Funktion der gleiche Wert. — Insbesondere ist $\tau_0 = \tau(\mathfrak{r}_0)$.

Es sei nun $\mathfrak{k}' = \frac{k}{(k, \mathfrak{k})}$. Ferner sei S die Gruppe derjenigen Ideale, die eine Darstellung als Hauptideal (α) gestatten mit einer Zahl $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{k}'$, die mod k in einer rationalen Restklasse liegt. S ist eine mod $\mathfrak{m}k$ erklärte Kongruenzidealgruppe und stimmt im Falle $\Omega \neq \mathsf{P}(i), \mathsf{P}(\eta)$ mit dem Durchschnitt des Strahles $S_{\mathfrak{m}\mathfrak{k}'}$ mod $\mathfrak{m}\mathfrak{k}'$ und des Ringes R_k überein, während sie in diesen beiden Körpern enger ist als jener Durchschnitt. Dann hängen die Werte $\tau(\mathfrak{r})$ nur von der Restklasse nach S (S-Klasse) ab, der $\mathfrak{r}$ angehört. Ist nämlich $\mathfrak{r}' \equiv \mathfrak{r} \bmod S$, also $\frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}} = (\xi)$ mit $\xi \equiv 1 \bmod^* \mathfrak{m}\mathfrak{k}'$ und ξ in Ω_k^*, so ist $\tau(\mathfrak{r}') = \tau(\varrho\xi \mid \mathfrak{a}^{(k)})$; wegen $\xi \equiv 1 \bmod^+ \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{k}'}{\mathfrak{r}}$, also $\varrho\xi \equiv \varrho \bmod^+ \mathfrak{k}\mathfrak{k}'\mathfrak{a}$, also sicher $\bmod^+ k\mathfrak{a}$, liegt $\varrho\xi - \varrho$ in $\mathfrak{a}$ und Ω_k, es ergibt sich also derselbe Funktionswert. Die $\tau(\mathfrak{r})$ sind demnach Invarianten der S-Klassen.

Für diese Invarianten gelten weitgehend dieselben Gesetze mit den Beweisen wie für die Strahlklasseninvarianten der Hasseschen Theorie. Wie dort sieht man, daß die $\tau(\mathfrak{r})$ algebraische Zahlen sind, in deren Nenner höchstens die Primteiler von mk aufgehen, wenn m das kleinste rationale Multiplum von $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{r}_1$ ganz und zu $\mathfrak{m}k$ prim, so ist

$$\tau(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) = \tau\left(\varrho \,\middle|\, \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}_1}\right)^{(k)}\right).$$

Für die Primideale $\mathfrak{p}$ ersten Grades mit endlich vielen Ausnahmen läßt sich daraus in bekannter Weise die fundamentale Kongruenz

$$\tau(\mathfrak{r}\mathfrak{p}) \equiv \tau(\mathfrak{r})^p \quad \bmod \mathfrak{p}$$

ableiten. — Jeder S-Invariante $\tau(\mathfrak{r}) = \tau(\varrho \mid \mathfrak{a}^{(k)})$ entspricht eine zugehörige Ringklasseninvariante $j(\mathfrak{a}^{(k)})$. Sie hängt nur von der Ringklasse mod k ab, der $\mathfrak{a}$ angehört; für Ideale $\mathfrak{a}$ aus verschiedenen Ringklassen sind diese Invarianten verschieden. Für sie gilt die Kongruenz[3])

$$j\left(\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}}\right)^{(k)}\right) \equiv j(\mathfrak{a}^{(k)})^p \quad \bmod \mathfrak{p}.$$

Jetzt sei H der Komplex derjenigen S-Klassen, deren S-Invariante mit $\tau_0 = \tau(\mathfrak{r}_0)$ übereinstimmt und die zugleich der Hauptringklasse angehören; durchläuft $\mathfrak{h}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) ein Repräsentantensystem ganzer Ideale dieser Klassen, so ist $\tau(\mathfrak{r}_0) = \tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{h}_\nu)$. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades, für das die obigen beiden Kongruenzen gelten und das nicht in mk und nicht in den Relativdiskriminanten von $\tau(\mathfrak{r}_0)$ und $j(\mathfrak{a}_0^{(k)})$ über Ω aufgeht. Im Körper $\mathsf{K} = \Omega(\tau(\mathfrak{r}_0), j(\mathfrak{a}_0^{(k)}))$ zerfällt $\mathfrak{p}$ also in lauter verschiedene Primideale, $\mathfrak{P}$ sei eins davon. Der Grad von $\mathfrak{P}$ bezüglich $\mathfrak{p}$ sei f. Ferner sei f^* die Ordnung von $\mathfrak{p}$ be-

[3]) Siehe Weber, a. a. O., insbesondere Abschnitt 17 und 18. Auch die entsprechenden Teile der Hasseschen Begründung der Theorie lassen sich leicht vom dort behandelten Spezialfall $k = 1$ auf beliebiges k verallgemeinern.

züglich H, also die früheste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in H liegt; eine solche gibt es, da sicher S selbst in H enthalten ist. Da $\tau(\mathfrak{r}_0)$ und $j(\mathfrak{a}_0^{(k)})$ für $\mathfrak{P}$ ganz sind, läßt sich jede für $\mathfrak{P}$ ganze Zahl A von K mod $\mathfrak{P}$ darstellen in der Form

$$\mathsf{A} \equiv \sum_{\iota,\varkappa=0}^{n} \alpha_{\iota\varkappa}\, \tau(\mathfrak{r}_0)^{\iota}\, j(\mathfrak{a}_0^{(k)})^{\varkappa} \mod \mathfrak{P}$$

bis zu einem geeigneten n summiert, mit für $\mathfrak{P}$ ganzen $\alpha_{\iota\varkappa}$ aus Ω. Daraus folgt in bekannter Weise mittels der obigen Kongruenzen

$$\mathsf{A}^{p^{f^*}} \equiv \Sigma\alpha_{\iota\varkappa}\, \tau(\mathfrak{r}_0)^{\iota p^{f^*}}\, j(\mathfrak{a}_0^{(k)})^{\varkappa p^{f^*}} \equiv \Sigma\alpha_{\iota\varkappa}\, \tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{p}^{f^*})^{\iota}\, j\left(\left(\frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{p}^{f^*}}\right)^{(k)}\right)^{\varkappa} \equiv \mathsf{A} \mod \mathfrak{P}.$$

Also $f \leqq f^*$. Andrerseits gilt

$$\tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{p}^{f}) \equiv \tau(\mathfrak{r}_0)^{p^f} \equiv \tau(\mathfrak{r}_0) \mod \mathfrak{P},$$
$$j\left(\left(\frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{p}^{f}}\right)^{(k)}\right) \equiv j(\mathfrak{a}_0^{(k)})^{p^f} \equiv j(\mathfrak{a}_0^{(k)}) \mod \mathfrak{P}.$$

Wenn $\mathfrak{p}$ nicht im Differenzenprodukt aller $j(\mathfrak{a}^{(k)})$ aufgeht, welches nicht Null ist, da die Ringklasseninvarianten zu verschiedenen Ringklassen verschieden sind, und ebenfalls nicht im Differenzenprodukt aller verschiedenen unter den $\tau(\mathfrak{r})$, so folgt

$$j\left(\left(\frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{p}^{f}}\right)^{(k)}\right) = j(\mathfrak{a}_0^{(k)}), \qquad \tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{p}^{f}) = \tau(\mathfrak{r}_0).$$

$\mathfrak{p}^f$ liegt nach der ersten Gleichung in der Hauptringklasse und deswegen nach der zweiten Gleichung in H. Also folgt $f \geqq f^*$. Zusammen ergibt sich $f = f^*$. Das ist das Zerlegungsgesetz für K.

Ist $\mathfrak{r}_1$ ein beliebiges ganzes zu $\mathfrak{m}k$ primes Ideal, so zeigt man auf Grund der oben angegebenen Form von $\tau(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)$ mit Hilfe des Prinzips der komplexen Multiplikation, daß ein nur von der S-Klasse von $\mathfrak{r}_1$ abhängiges Polynom $P_{\mathfrak{r}_1}$ mit Koeffizienten aus Ω existiert derart, daß für jede S-Invariante $\tau(\mathfrak{r})$ mit der zugehörigen Ringklasseninvariante $j(\mathfrak{a}^{(k)})$ gilt

$$\tau(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) = P_{\mathfrak{r}_1}(\tau(\mathfrak{r}), j(\mathfrak{a}^{(k)})).$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{r}$ nacheinander alle $\mathfrak{r}_0\mathfrak{h}_\nu$ ein, so bekommen beide Argumente von $P_{\mathfrak{r}_1}$ stets denselben Wert: $\tau(\mathfrak{r}) = \tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{h}_\nu)$ nach Definition der $\mathfrak{h}_\nu$, und $j(\mathfrak{a}^{(k)}) = j\left(\left(\frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{h}_\nu}\right)^{(k)}\right)$, weil die $\mathfrak{h}_\nu$ zur Hauptringklasse gehören. Es folgt

$$\tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{h}_\nu) = \tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1).$$

Da man wegen der Gruppeneigenschaft der S-Klassen ebenso von $\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1$ auf $\mathfrak{r}_0$ schließen kann, besteht der $\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1$ im obigen Sinne zugeordnete Komplex H aus denselben $\mathfrak{h}_\nu$; H gehört also in gleicher Weise zu allen S-Klassen. Wendet man dies Ergebnis auf $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{h}_\mu$ an, so zeigt sich, daß die $\mathfrak{h}_\nu$ eine Gruppe bilden; im allgemeinen folgt, daß die jeweils gleichen $\tau(\mathfrak{r})$ für alle $\mathfrak{r}$ einer und derselben Ringklasse sich auf die Nebenklassen nach H verteilen. Das abgeleitete Zerlegungsgesetz erweist sich damit als das Klassenkörperzerlegungsgesetz, K ist Klassenkörper zur Idealgruppe H. Für H gilt $S_{\mathfrak{m}k} \leqq S \leqq H \leqq R_k$. Nach obigem kann man diese Abschätzung sofort verbessern. Sei $\mathfrak{h}_\nu = (\lambda_\nu)$ mit λ_ν aus Ω_k^*, also

$$\tau(\mathfrak{r}_0) = \tau(\varrho_0 \mid \mathfrak{a}_0^{(k)}), \qquad \tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{h}_\nu) = \tau(\varrho_0\lambda_\nu \mid \mathfrak{a}_0^{(k)}).$$

Damit die beiden Invarianten gleich sind, muß, da $\tau(u \mid \omega_1, \omega_2)$ im Periodenparallelogramm jeden Wert nur zweimal annimmt, $\varrho_0\lambda_\nu \mp \varrho_0$ sicher in $\mathfrak{a}_0$ liegen; folglich ist

$\varrho_0\lambda_\nu \mp \varrho_0 \equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{a}_0$, $\lambda_\nu \equiv \pm 1 \bmod^+ \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{f}\mathfrak{r}_0}$ und $\bmod^\bullet \mathfrak{m}$, da $\mathfrak{f}\mathfrak{r}_0$ zu $\mathfrak{m}$ prim. Daher ist $H \leqq S_\mathfrak{m}$. Zusammenfassend können wir also sagen:

Satz 1. *$\tau_0 = \tau(\varrho_0 \mid \mathfrak{a}_0^{(k)})$ ist eine abelsche Zahl über Ω und erzeugt zusammen mit der zugehörigen Ringklasseninvariante $j(\mathfrak{a}_0^{(k)})$ einen Klassenkörper über Ω, für dessen zugehörige Idealgruppe H in Ω gilt*

$$S_{\mathfrak{m}k} \leqq S \leqq H \leqq S_\mathfrak{m} \frown R_k.$$

H besteht aus denjenigen zu $\mathfrak{m}k$ primen Idealen $\mathfrak{h}$ der Hauptringklasse, für die $\tau(\mathfrak{r}_0) = \tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{h})$.

Wenn ϱ_0 zu k prim ist, läßt sich H einfacher angeben. Es ist dann $\mathfrak{f} = 1$, $(\mathfrak{m}, k) = 1$. Das zu $\mathfrak{m}k$ prime Ideal $\mathfrak{h} = (\lambda)$ mit λ aus Ω_k^* gehört dann und nur dann zu H, wenn $\varrho_0\lambda \mp \varrho_0$ zu $\mathfrak{a}_0$ und zu Ω_k gehört. Notwendig und hinreichend für das erstere ist $\lambda \equiv \pm 1 \bmod^\bullet \mathfrak{m}$. Zur Diskussion der zweiten Bedingung sei 1, ω eine Basis der ganzen Zahlen von Ω und $\varrho_0 = a + b\omega$ mit für k ganzen a, b. Der Index von ϱ_0 bezüglich Ω_k, der in diesem Fall ein Teiler von k ist, sei j, also $jb \equiv 0$, $j'b \not\equiv 0 \bmod^\bullet k$ bei jedem echten Teiler j' von j. λ hat die Form $x + yk\omega$ mit ganz-rationalen x, y. Damit

$$\varrho_0\lambda \mp \varrho_0 = (a + b\omega)(x \mp 1 + yk\omega) = a(x \mp 1) + [b(x \mp 1) + ayk]\omega + byk\omega^2$$

in Ω_k liegt, muß $j \mid x \mp 1$, also λ von der Form $\lambda = \pm 1 + jx' + yk\omega$ sein. Wenn das umgekehrt der Fall ist, liegt $\varrho_0\lambda \mp \varrho_0$ wirklich in Ω_k. Damit ist H bestimmt: H ist die Gruppe der (λ) mit Zahlen λ aus Ω_k^* und $\lambda \equiv \pm 1 \bmod \mathfrak{m}j$. Im Falle $\Omega \neq \mathsf{P}(i), \mathsf{P}(\eta)$ ist das der Durchschnitt des Strahles $S_{\mathfrak{m}j} \bmod \mathfrak{m}j$ mit R_k.

Satz 2. *$\tau_0 = \tau(\varrho_0 \mid \mathfrak{a}_0^{(k)})$ mit zu k primem ϱ_0 erzeugt im Falle $\Omega \neq \mathsf{P}(i), \mathsf{P}(\eta)$ über dem Ringklassenkörper mod k über Ω den Strahlklassenkörper mod $\mathfrak{m}j$, wenn j der Index von ϱ_0 bezüglich Ω_k ist.*

Im allgemeinen läßt sich H nicht mehr so einfach charakterisieren, wie das Beispiel $\tau\left(\dfrac{\omega}{p} \,\middle|\, 1^{(p)}\right)$ zeigen möge. Die zugehörige Idealgruppe in Ω ist der Strahl mod p^2, vergrößert um alle $(1 + xp\bar{\omega})$ mit ganz-rationalen x. — Wir untersuchen noch den Fall $\mathfrak{f} = 1$ näher. Die sämtlichen S-Invarianten $\tau(\mathfrak{r})$, die in Bezug auf einen festen Teilwert τ_0 gebildet sind, erzeugen zusammen mit der zugehörigen Ringklasseninvariante jeweils denselben Körper über Ω. Unter ihnen kommt stets eine solche $\tau(\varrho \mid 1^{(k)})$ vor, die mit $\mathfrak{a} = 1$ gebildet werden kann. Die Bedingung für die in Frage stehenden λ lautet hier

$$\varrho\lambda \mp \varrho = u + vk\omega, \qquad \lambda = \pm 1 + u\bar{\varrho}\frac{N(\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{r})} + \frac{vk\omega}{\varrho}$$

mit ganz-rationalen u, v. Der zweite Summand hat die Idealdarstellung $\dfrac{yk\omega\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}}$, ist also $\equiv 0 \bmod^\bullet \mathfrak{m}k$ und darf infolgedessen fortbleiben, da λ wegen $S_{\mathfrak{m}k} \leqq H$ nur mod $\mathfrak{m}k$ bestimmt ist. Für λ ergibt sich, wenn $N(\mathfrak{r})$ zu $\mathfrak{m}k$ prim angenommen wird, die Form $\lambda = \pm 1 + x\bar{\varrho}N(\mathfrak{m})$ mit ganz rationalem x, das mod k bestimmt ist und so gewählt werden muß, daß $x\bar{\varrho}N(\mathfrak{m})$ in Ω_k liegt; x muß Vielfaches des Index von $\bar{\varrho}N(\mathfrak{m})$ sein. Daß umgekehrt für jedes dieser λ wirklich $\varrho(\lambda \mp 1) = x\varrho\bar{\varrho}\,N(\mathfrak{m})$ in Ω_k liegt, ist klar. Demnach besteht die zu $\tau(\varrho \mid 1^{(k)})$ gehörige Gruppe H aus dem Strahl mod $\mathfrak{m}k$ vergrößert um alle $(1 + x\bar{\varrho}N(\mathfrak{m}))$ der angegebenen Art.

Eingegangen 13. Dezember 1934.